2019 年解析学特別演習 III テスト (5) 解答解説

2019 年 11 月 27 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は各問 25 点で，平均点は 71.6 点，最高点は 100 点 (10 人) でした．

[1] $a_0 = 0$ であり，その他の場合は普通に積分して，

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ が偶数の時}, \\ \dfrac{4i}{n}, & n \text{ が奇数の時}, \end{cases}$$

となります．

[2] 授業でやった $f(x) = x$, $(x \in [-\pi, \pi])$ の Fourier 級数展開を π だけずらすことにより，答えは $f(x) = -i(x - \pi)$, $(0 \le x < 2\pi)$ です．

[3] $f(x) = \chi_{[-1,1]}$ の Fourier 変換は $\hat{f}(\xi) = \dfrac{2\sin\xi}{\xi}$ です．($\xi = 0$ の時はこの値は 2 と解釈します．この問題において以下同様です．) これは可積分関数なので，

$$f * f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \le x \le 0, \\ -x + 2, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & |x| \ge 2, \end{cases}$$

であり，この Fourier 変換は $\dfrac{4\sin^2\xi}{\xi^2}$ となります．これについて Poisson の和公式が使える形になっており，$x \in [-\pi, \pi]$ のとき $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f * f(x + 2n\pi) = f * f(x)$ なので，

$$2\pi \times 2 = 4 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2 n}{n^2}$$

となります．これより問題の等式を得ます．

[4] $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = e^{-|x|}$ とおくと，この Fourier 変換は $\hat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1 + \xi^2}$ となります．これについて Poisson の和公式の証明を適用することができ，

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|x+2n\pi|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2}{1+n^2} e^{inx}$$

を得ます．ここで $x = \pi$ とおくことにより，

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|\pi+2n\pi|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^n}{1+n^2}$$

となるので，左辺を無限級数の和の公式で整理することにより，問題の等式を得ます．