2018年解析学特別演習IIIテスト(3)解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟323号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

[1] は各問15点，[2], [3] は各20点の配点です．平均点は57点，最高点は100点 (1人) でした．

[1] (1) 誤り．$(0,1)$ 区間の有理数に番号を振ったものを $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ とします．

$$E = (0,1) \cap \bigcup_{n=1}^\infty (a_n - \frac{1}{2\cdot 3^n}, a_n + \frac{1}{2\cdot 3^n})$$

とおくと，

$$\mu(E) \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

となりますが，もちろん E は開集合であり，すべての有理数を含むので稠密でもあります．同様にして E の測度はいくらでも小さくできます．

多くの人が「正しい」と間違えていました．

(2) 正しい． $E = \{x \in (0,1) \mid f(x) > 0\}$，$E_n = \{x \in (0,1) \mid f(x) \ge 1/n\}$ とおくと，

$$0 \le \frac{1}{n}\mu(E_n) \le \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

より，$\mu(E_n) = 0$ となります．よって $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ より，$\mu(E) = 0$ もわかります．

(3) 誤り．Cantor 集合を考えます．すなわち，$(0,1)$ 区間内で3進小数展開したときに，$0, 2$ だけしか現れない実数たちの集合を E とします．(3進小数展開が二通りできる数は可算個しかないので，以下の議論に気にしなくてかまいません．) これらは，$0, 2$ を可算個並べてできる数たちなので，連続濃度だけあります．しかし，Lebesgue 測度を考えると，$(0,1)$ 区間から，真ん中の長さ $1/3$ の区間を抜いて，次に残りの長さ $1/3$ の2区間から，それぞれその真ん中の長さ $1/3^2$ の区間を抜いて，さらに，残りの長さ $1/3^2$ の4区間から，それぞれその真ん中の長さ $1/3^3$ の区間を抜いて $\cdots$ と続けていけば E との違いはたかだか可算集合です．この集合 E は可測で，その測度は $2^n/3^n$ で抑えられるので，結局 0 となります．

(4) 誤り．$\chi_{(0,\infty)} - \chi_{(-\infty,0)}$ を考えれば簡単な反例になります．$(\sin x)/x$ でもできますが，極限の存在がそれほど自明ではなくなります．

[2] $\mu(A) < \infty$ が必要十分条件です．

これが十分条件であることは Cauchy-Schwarz の不等式からわかります．

必要条件であることは次のようにわかります．$\mu(A) = \infty$ であったとすると，任意に与えられた k に対し，十分大きな n をとって $[-n,n] \cap A$ を考えることにより，可

測集合 $B \subset A$ で，$k < \mu(B) < \infty$ となるものが取れます．これを繰り返し使うことにより，互いに disjoint な可測集合 A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で，$A_n \subset A$, $n^2 < \mu(A_n) < \infty$ となるものが取れます．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}$$

とおくと，$\int f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$ ですが，$\int f(x)^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu(A_n) < \infty$ となります．

[3] 実部と虚部に分けて考えることができるので，最初から $f(x), g(x)$ は実数値を取ると仮定できます．

$E_k = \{x \in X \mid f(x) - g(x) > 1/k\}$ とおくと，$0 = \displaystyle\int_{E_k} (f - g)\, d\mu \geq \frac{\mu(E_k)}{k}$ となるので $\mu(E_k) = 0$ です．k について和を取ることにより，$\mu(\{x \in X \mid f(x) - g(x) > 0\})$ がわかります．同様に $\mu(\{x \in X \mid f(x) - g(x) < 0\})$ もわかるので，$f(x) = g(x)$ a.e. となります．