2018 年解析学特別演習 III テスト (2) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

各問 20 点の配点です．平均点は 52 点、最高点は 90 点 (3 人) でした。

[1] $z = x + iy$ (x, y は実数) と書くと，$|f(t)e^{itz}| \le \|f\|_\infty e^{-ty}$ であり，$y > 0$ だから $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ty}\,dt < \infty$ です．このことより $F(z)$ を定める積分は可積分です．

被積分関数を x で偏微分すると $itf(t)e^{itx}e^{-ty}$, y で偏微分すると $-tf(t)e^{itx}e^{-ty}$ です．前者の絶対値は x によらず $\|f\|_\infty te^{-ty}$ で抑えられ，この関数は可積分です．また後者の絶対値は y が開区間 (a, b) $(0 < a < b)$ を動くときに $\|f\|_\infty te^{-at}$ で抑えられ，この関数は可積分です．よって Lebesgue の収束定理の系である，積分記号下の微分を適用することができ，$i\dfrac{\partial F(z)}{\partial x} = \dfrac{\partial F(z)}{\partial y}$ を得ます．すなわち $F(z)$ は Cauchy-Riemann 方程式を満たします．また被積分関数の偏微分に関する同様の評価により，再び Lebesgue の収束定理により，$\dfrac{\partial F(z)}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial F(z)}{\partial y}$ はともに連続であることがわかります．すなわち $F(z)$ は C^1 級です．以上より，$F(z)$ は正則関数となります．

完全な正解者は 1 名しかいませんでした．

[2] 実部と虚部に分けて考えればよいので，最初から $f(x)$ は実数値であるとしてかまいません．$f(x)$ が微分不可能な点の集合を E とすれば，仮定により E は Lebesgue 測度 0 を持ち，特に Lebesgue 可測です．E 以外の点では $f_n(x) = n(f(x+1/n) - f(x))$ とおけばこれは Lebesgue 可測関数であり，E 以外の点 x で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ となっているので Lebesgue 可測関数の収束先として Lebesgue 可測です．よって $g(x)$ は Lebesgue 可測関数です．

[3] 答えの一例は (1) $\chi_{(0,1]}(x)x^{-1/2}$, (2) $\chi_{[1,\infty)}(x)x^{-1}$ です．だいたいこのような例が挙げられていました．

[4] 有名な留数計算で答えは π です．たとえば Ahlfors の Chapter 4, 5.3 の 3 に出ています．

[5] 原点中心，半径 N で上半平面にある半円板の境界上で積分して留数計算します．$N \to \infty$ としたとき，半円周上の積分は 0 に行き，$z = i$ での留数から，答えは $\pi/2$ となります．

$x = \tan\theta$ と置換しても初等的にできます．