

2018 年解析学特別演習 III テスト (1) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

[1] の各問はできていれば 0 点, できていなければ -10 点で, [2], [3], [4], [5] は各 25 点です. 合計点が負になった人は 0 点にしてあります. 平均点は 36 点, 最高点は 100 点 (2 人) でした.

[1] 重要な仮定が抜けているものは×ですが, それ以外は甘くつけてあります. これができているようでは, この授業にはついて来られません. できていなかった人は, 必ず復習して身につけておいてください.

[2] これも重要な仮定 (領域が単連結とか, 積分路が 1 点にホモトピックとか) が抜けているものは×ですが, それ以外は甘くつけてあります. 聞いているのは Cauchy の積分定理ですが, 積分公式のほうを書いても○にしてあります.

[3] 任意の実数 a と, 任意の実数列 $\{a_n\}_n$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+a_n} f(t) dt = 0$ を示せば十分です. $a, a+a_n$ を両端とする閉区間を I_n とおいて, 関数列 $\{\chi_{I_n}(t)f(t)\}_n$ を考えると, 可積分関数 $|f(t)|$ によって一斉に抑えられるため Lebesgue の収束定理が使って, 上の極限は 0 になります.

[4] $(0, 1)$ を n 等分し, それぞれの开区間の特性関数を左から順に並べます. これを n を増やしながら順に並べていけば欲しいものができます. 正解者は基本的にすべてこのパターンでした.

[5] $\sin^2 x$ のところを $e^{\pm ix}$ を使って展開すると, 計算すべき式は $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm 2ix}}{1+x^2} dx$ です. 留数を使って計算しますが, 積分路は原点中心, 半径 R の半円で, 上半平面に含まれるもの, 下半平面に含まれるものを使い, $R \rightarrow \infty$ とします. これで答えは $\pi(1 - e^{-2})/2$ になります.

この授業では Fourier 変換を用いて, 留数計算を使わない方法も示します.