2018 年解析学特別演習 III テスト (1)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．

自筆ノート持ち込み可で行います．本，コピー等は不可です．計算用紙はありません．自分のノート等を使ってください．電子機器の使用は不可です．

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．

[1] 次の各命題のステートメントを書け．

(1) Lebesgue の収束定理

(2) Fatou の補題

(3) 単調収束定理

[2] Cauchy の積分定理ステートメントを書け．(いろいろなバージョンがあるがどれでもよい．)

[3] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 可積分関数とする．実数 x に対し $g(x) = \displaystyle\int_{x-2}^{x+3} f(t)\, dt$ としたとき，$g(x)$ は連続関数であることを示せ．

[4] つぎのすべての条件を満たすような，$(0,1)$ 上の Lebesgue 可積分関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ の例を一つ挙げよ．条件を満たしていることをきちんと説明すること．

(1) $\|f_n\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$.

(2) どの $x \in (0,1)$ についても，数列 $\{f_n(x)\}_n$ は収束しない．

また，例に挙げた関数列について，どのように部分列 $\{f_{n_k}(x)\}_k$ を取れば次の条件を満たすようにできるか述べよ．

(3) x についてほとんどいたるところ，数列 $\{f_{n_k}(x)\}_k$ は 0 に収束する．

[5] 次の積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx.$$