2018 年度解析学 VI 期末テスト解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は，[1] 15 点，[2] 20 点，[3] 20 点，[4] 15 点，[5] (1) 5 点，(2) 10 点，[6] 15 点です．100 点満点で平均点は 66.6 点，最高点は 100 点 (4 人) でした．得点分布は以下の通りです．

0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100	合計
0(人)	0	0	2	4	5	6	1	5	1	4	28

この得点と成績が赤字で書いてあります．成績は 100 点が A+(4 人), 80 点以上が A(6 人), 65 点以上が B(5 人), 45 点以上が C(9 人), それ未満が D(4 人) です．

演習の成績 (悪い 1 回分を除いた平均) は，平均点は 41.3 点，最高点は 92 点 (1 人) でした．得点分布は以下の通りです．

0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100	合計
10(人)	1	1	3	6	7	6	1	1	1	0	37

こちらの成績が青字で書いてあります．成績は 80 点以上が A+(2 人), 60 点以上が A(7 人), 40 点以上が B(13 人), 25 点以上が C(3 人), それ未満が D(12 人) です．ただし期末試験の成績が特に良かった人は，本来より良い成績がついています．

[1] まず，Hölder の不等式より問題の被積分関数は可積分となり，convolution が定義されます．

$t, x \in \mathbf{R}$ に対し，$f_t(x) = f(t-x)$ とおきます．$t, h \in \mathbf{R}$ に対し，$h \to 0$ のとき $\|f_{t+h} - f_t\|_p \to 0$ であることをまず示します．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$f_0 \in C_0(\mathbf{R})$ で $\|f - f_0\|_p < \varepsilon$ となるものが取れます．$t \in \mathbf{R}$ を固定して，$|h| \le 1$, $h \to 0$ としたとき，$f_{0,t+h}$ の台はすべて共通の有界区間に含まれ，$f_{0,t+h}$ は $f_{0,t}$ に一様収束するので，$\delta > 0$ が取れて，$|h| < \delta$ のとき，$\|f_{0,t+h} - f_{0,t}\|_p < \varepsilon$ となります．よって，$|h| < \delta$ のとき，

$$\|f_{t+h} - f_t\|_p \le \|f_{t+h} - f_{0,t+h}\|_p + \|f_{0,t+h} - f_{0,t}\|_p + \|f_{0,t} - f_t\|_p < 3\varepsilon$$

となるので，欲しい評価が出ます．

次に Hölder の不等式より

$$|f * g(t+h) - f * g(t)| = \left| \int (f_{t+h}(x) - f_t(x)) g(x)\, dx \right| \le \|f_{t+h} - f_t\|_p \|g\|_q$$

なので，$h \to 0$ のとき，最右辺が 0 に収束し，左辺も 0 に収束します．

[2] 授業でやった通り，$-\pi \leq x \leq \pi$ のとき，

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

です．これより，$0 \leq x \leq 2\pi$ のとき，

$$(x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n\neq 0} \frac{e^{inx}}{n^2}$$

です．よって，求める値は $\dfrac{x^2}{2} - \pi x + \dfrac{\pi^2}{3}$ となり，一般の x については，これを周期 2π で実数全体に延長した関数が答えとなります．

あるいは次のようにもできます．

問題の無限級数は一様絶対収束しているので連続関数になりますが，これを超関数と思ったものを T とおきます．すると，超関数については項別微分ができるので，それを 2 回行って，$T'' = \displaystyle\sum_{n\neq 0} -e^{inx}$ を得ます．Poisson の和公式より，これは $1 - 2\pi \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta_{2\pi n}$ に等しくなっています．これを積分することにより，$T' = 2\pi \left(\dfrac{x}{2\pi} - \left[\dfrac{x}{2\pi} \right] \right) + c_1$ となるので，これをさらに積分して，T は，$[0, 2\pi]$ 上の関数 $\dfrac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$ を，周期 2π で実数全体に延長した関数に等しくなります．(c_1, c_2 は定数．) これは周期 2π の連続関数になるはずなので，$c_1 = -\pi$ です．また元の式の項別積分より，T を $[0, 2\pi]$ 上で積分した値は 0 になるはずなので，$c_2 = \dfrac{\pi^2}{3}$ となります．これで上と同じ答えが得られます．

[3] $\chi_{[-1,1]}(x)$ の Fourier 変換が $\dfrac{2\sin\xi}{\xi}$, $\dfrac{1}{1+x^2}$ の Fourier 変換が $\pi e^{-|\xi|}$ であることより，$\chi_{[-1,1]}(x)$ と $\dfrac{1}{1+x^2}$ の convolution の Fourier 変換が $2\pi e^{-|\xi|} \dfrac{\sin\xi}{\xi}$ となります．この convolution は $\arctan(x+1) - \arctan(x-1)$ に等しいので，Fourier 逆変換することにより，答えは $\arctan(\xi+1) - \arctan(\xi-1)$ です．問題の積分とこの答えはとりあえず，ほとんどいたるところ一致しますが，両者とも ξ の連続関数なので，すべての ξ でこれが答えです．

[4] $f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ を，0 の近傍で $f(x) = 1, g(x) = 0$, 1 の近傍で $f(x) = 0, g(x) = 1$ となるように取ります．$\mathrm{supp}\, T \subset \{0, 1\}$ のとき，$T = (f+g)T = fT + gT$ で，$\mathrm{supp}\, fT \subset \{0\}$, $\mathrm{supp}\, gT \subset \{1\}$ なので，$fT = \sum_{n=0}^{k} a_n \delta_0^{(n)}$, $gT = \sum_{n=0}^{l} b_n \delta_1^{(n)}$ となります．(k, l は 0 以上の整数，a_n, b_n は複素数です．) よって，$T = \sum_{n=0}^{k} a_n \delta_0^{(n)} + \sum_{n=0}^{l} b_n \delta_1^{(n)}$ となります．

[5] (1) まず，$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ なので定義式の右辺の無限和は実際には有限和であることに注意します．T の線型性は明らかです．

$\{\varphi_k\}_k \subset \mathcal{D}(\mathbf{R})$ で，$\varphi_k \to 0$ $(k \to \infty)$ とすると，$\operatorname{supp} \varphi_k \subset [-N, N]$ となる，k によらない自然数 N が取れます．このときすべての k について，定義式の右辺の無限和は実際には $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}$ の形なので，$k \to \infty$ としたとき

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^k \varphi_k(n)\right| \leq N^k \sum_{n=1}^{N} |\varphi_k(n)| \to 0$$

と評価できて，$\langle T, \varphi_k \rangle \to 0$ となります．これによって，T が超関数であることがわかります．

(2)

$$|\sum_{n=1}^{\infty} n^k \varphi(n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi(n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} n^{k+2} |\varphi(n)| \leq \frac{\pi^2}{6} p_{k+2}(\varphi)$$

なので緩増加です．

[6] $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\xi^2)^{5/4}} e^{ix\xi}\, d\xi$ とおけば，条件を満たしていることが簡単にわかります．

または最後の授業でやった $\sqrt{x}$ を使ったものを，$x^{3/2}$ に代えて次のようにおいてもできますが，もう少し評価が必要になります．

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ のとき，} \\ x^{3/2} \varphi(x), & x \geq 0 \text{ のとき．} \end{cases}$$

ここで $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ は $x = 0$ の近傍で 1 となるものです．