2018 年度解析学 VI 期末テスト

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.

自筆ノート持ち込み可で行います．本，コピー等は不可です．また，電子機器の使用は不可です.

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙に収まるように書いてください．答案用紙の裏面を使用してもかまいませんが，その場合は表面の一番下に「裏面使用」と書いてください.

[1] $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ とする．$f \in L^p(\mathbf{R})$, $g \in L^q(\mathbf{R})$ のとき，$f * g$ が定義されて連続関数となることを示せ.

[2] 次の級数の和を求めよ．ただし x は実数である.

$$\sum_{n \neq 0, n \in \mathbf{Z}} \frac{e^{inx}}{n^2}.$$

[3] 次の積分の値を求めよ．ただし ξ は実数である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-|x|} e^{-ix\xi}\, dx.$$

[4] $\mathrm{supp}\, T \subset \{0, 1\}$ となる $\mathbf{R}$ 上の超関数 T をすべて求めよ.

[5] k を自然数とする．$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ に対し，$\langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k \varphi(n)$ とおく.

(1) この T が $\mathbf{R}$ 上の超関数となることを示せ.

(2) この T が緩増加であることを示せ.

[6] $\mathbf{R}$ 上の L^2 関数 f であって，$f \in H^s(\mathbf{R})$ となるための必要十分条件が $0 \leq s < 2$ であるようなものの例を一つ挙げよ．根拠をきちんと説明すること.