2018 年解析学特別演習 III テスト (6) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

[1] まず

$$a_0 = \int_0^\pi x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

です．次に $n \neq 0$ として，

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^\pi xe^{-inx}\,dx \\ &= \left[x\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^\pi + \frac{1}{in}\int_0^\pi e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{\pi(-1)^n i}{n} + \left[\frac{e^{-inx}}{n^2}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi(-1)^n i}{n} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

となり，これが答えです．

[2] まず

$$a_0 = \int_0^{2\pi} (x-\pi)^3\,dx = 0$$

です．次に $n \neq 0$ として，

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}(x-\pi)^3 e^{-inx}\,dx &= \left[(x-\pi)^3\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^{2\pi} + \frac{3}{in}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2 e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{2\pi^3}{-in} - \frac{6}{n^2}\int_0^{2\pi}(x-\pi)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{2\pi^3 i}{n} - \frac{6}{n^2}\left[(x-\pi)\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\pi^3 i}{n} - \frac{12\pi i}{n^3} \end{aligned}$$

となり，これが答えです．

[3] $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{m\in\mathbf{Z}} a_m e^{imx}$, $g(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{m\in\mathbf{Z}} b_m e^{imx}$ (いずれも L^2 収束) です．後者より，$g(x)e^{-inx} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{m\in\mathbf{Z}} b_m e^{i(m-n)x} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{m\in\mathbf{Z}} b_{m+n}e^{imx}$ なので，正規直交基底に関す

る性質より，$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}} a_m b_{-m+n}$ となります．右辺は絶対収束しています.

[4] 仮定より，$g(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{inx}$ とおくと，右辺は L^2 収束しており，g は L^2 関数となります．この時 $f(x) - g(x)$ は L^1 関数であり，そのすべての Fourier 係数が 0 となるので，Fourier 逆変換公式により，ほとんどいたるところ 0 となります．よって，f も L^2 関数となります.

また，次のようにもできます.

授業でやった $P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}$ を使うと，$(P_r * f)(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n r^{|n|} e^{inx}$ となるのでした．ここで $r \to 1-$ とすると，$\|P_r * f - f\|_1 \to 0$ になることを授業で示したので，1 に収束する適当な増大列 $\{r_k\}_k$ があって，$(P_{r_k} * f)(x) \to f(x)$ a.e. となります．一方，$\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n r^{|n|} e^{inx}$ は，L^2 収束しており，ここで $r \to 1-$ とすると，この関数は L^2 関数 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{inx}$ に L^2 収束します．よって，$\{r_k\}_k$ の部分列について，$\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n {r_k}^{|n|} e^{inx}$ が L^2 関数 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{inx}$ に a.e. 収束します．これらのことから，f は，L^2 関数 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{inx}$ にほとんどいたるところ等しいことがわかり，f は L^2 関数となります.