2018 年解析学特別演習 III テスト (5) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は各 25 点，平均点は 60 点，最高点は 100 点 (2 名) でした．

[1] $f_t(x) = f(x-t)$ とおきます．任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，$g \in C_0(\mathbf{R})$ で，$\|f-g\|_p < \varepsilon$ となるものが取れます．g については台が有界なことより一様連続となり，台が有界なことをもう一度使うと，$\delta > 0$ が取れて，$|t| < \delta$ のとき $\|g - g_t\|_p < \varepsilon$ となります．$|t| < \delta$ のとき，

$$\|f - f_t\|_p \le \|f-g\|_p + \|g-g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p \le 3\varepsilon$$

となるので結論を得ます．

授業でやった $p=1$ の場合と全く同じ論法です．

[2] 求める関数の Fourier 変換は $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ の k 乗で，$\pi^k e^{-k|\xi|}$ です．これを逆 Fourier 変換して $(f * f * \cdots * f)(x) = \dfrac{k\pi^{k-1}}{x^2+k^2}$ です．(左辺が連続であることは容易にわかるので，これは「すべての x」で正しい式です．)

[3] (1) $f(x)e^{-\varepsilon x^2}$ は L^1 かつ L^2 なので，L^1 関数として Fourier 変換したもの (すなわち g_ε) と，L^2 関数として Fourier 変換したもの (自動的に L^2 となる) はほとんどいたるところ一致します．よって g_ε は L^2 関数です．

(2) $f_\varepsilon(x) = f(x)e^{-\varepsilon x^2}$ とおくと，$|f(x)|^2$ が可積分であることと，Lebesgue の収束定理より，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0+} \|f_\varepsilon - f\|_2 = 0$ がわかります．あとは Plancherel の定理によって結論を得ます．

[4] まず $\xi \le 0$ として，原点中心で半径 R, $(R > 1)$, 上半平面にちょうど入る半円を積分路として $\dfrac{e^{-iz\xi}}{(1+z^2)^2}$ の留数計算を行います．

半円周上では $z = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, とおくと，$\xi \le 0$ より，$\left|\dfrac{e^{-iz\xi}}{(1+z^2)^2}\right| \le \dfrac{1}{(R^2-1)^2}$ と評価できます．これに積分路の長さ πR をかけても $R \to \infty$ としたときに 0 に収束するので，半円周上の積分も $R \to \infty$ としたときに 0 に収束します．また，半円の下辺の積分は $R \to \infty$ としたときに求めたい Fourier 変換の積分に収束します．一方，$z = i$ での留数は $\dfrac{i}{4}(-e^\xi + \xi e^\xi)$ となるので，求める積分値は $\dfrac{\pi}{2}(e^\xi - \xi e^\xi)$ です．

$\xi \ge 0$ のときは下半平面に入る半円を使って同様の計算をすれば，$\dfrac{\pi}{2}(e^{-\xi} + \xi e^{-\xi})$ です．両者を合わせて，答えは $\dfrac{\pi}{2}(|\xi|+1)e^{-|\xi|}$ です．

Fourier 変換して，$e^{-|\xi|}$ と自分自身の convolution を計算してもできます．