解析学 VI 期末テスト

2012 年 2 月 6 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

この試験は自筆ノート持ち込み可で行います．本，コピー等は不可です．

以下，$\mathbf{R}$ 上で考えている測度はすべて Lebesgue 測度である．δ_a は，$\mathbf{R}$ 上の Dirac の δ 関数であり，試験関数 φ に対して $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ となるものである．

[1] $\mathbf{R}$ 上の C^∞ 級関数 φ が，任意の実数 a に対して $\langle \delta_a'' + \delta_a, \varphi \rangle = 0$ を満たすとする．このような φ をすべて求めよ．

[2] 次の積分の値を求めよ．ただし ξ は実数である．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi} \sin x \cos x}{1+x^2}\, dx$$

[3] (1) 任意の多項式 $p(x)$ に対し，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\delta_n$ は緩増加超関数であることを示せ．

(2) 超関数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n$ が緩増加でないような数列 $\{a_n\}_n$ の例を一つ挙げよ．緩増加でないことの理由をきちんと示すこと．

[4] 次の Fourier 級数の値を求めよ．

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}, n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n^4}.$$

[5] 次の積分の値を求めよ．ただし ξ は実数である．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi} \sin x}{x(1+x^2)}\, dx$$

[6] $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ とする．通常のように

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dy$$

とおく．

(1) $f * g$ は超関数として緩増加であることを示せ．

(2) $f * g$ の緩増加超関数としての Fourier 変換は $\hat{f}\hat{g}$ に等しいことを示せ．ただし，$\hat{f}, \hat{g}$ はそれぞれ，L^2 関数としての f, g の Fourier 変換である．