

解析学特別演習 II・小テスト (7)

2011 年 12 月 12 日 10:00–12:15

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。裏面を使用してもかまいませんが、その場合は表面の最後に「裏面使用」と書いてください。

自分のノートの持ち込み可です。

以下、 \mathbf{R} 上で考えている測度はすべて Lebesgue 測度である。

[1] $[-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x) = |x|^3$ の Fourier 級数展開を求めよ。

[2] $[0, 2\pi]$ 上の Fourier 級数展開が $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{e^{inx}}{2n+1}$ になる L^2 関数を具体的に求めよ。

[3] $f \in L^2([0, 2\pi])$ とし、整数 n に対し $c_n = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx$ とおく。すべての自然数 k について $\sum_n |n|^k |c_n|^2 < \infty$ であれば、 f は、ある C^∞ 級関数とほとんどいたるところ一致することを示せ。

[4] \mathbf{R} 上の関数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ に対し、 $f_k(x) = (f * f * \cdots * f)(x)$ とおく。 (f の k 個の convolution をとったものである。) このとき $\sum_{n \in \mathbf{Z}} f_k(2\pi n)$ を求めよ。