解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (1)

2011 年 10 月 24 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

最高点は 100 点 (2 人)，平均点は 34.9 点でした．略解をつけます，これはかなり省略してあるので，できなかった人はよく考えて復習してください．

[1] すべて「ある」．一例は次の通り．
(1) $0 < |x| \le 1$ のとき，$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, その他のとき $f(x) = 0$.
(2) $|x| \ge 1$ のとき，$f(x) = \dfrac{1}{x}$, その他のとき $f(x) = 0$.
(3) $g(x) = \max(1 - |x|, 0)$ とおいて $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n(x-n))$.
(4) $f(x) = 1/\log(x^2+2)$.

[2] $0 < |x| \le 1$ のとき，$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, その他のとき $g(x) = 0$ とおく．$f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} g(x-n)$ とすれば，$L^1(\mathbf{R})$ の元だが，y が整数のところで問題の積分が可積分でなくなる．

[3] (1) $|t| \le 1$ で考えればよく，そのときすべての $f - f_t$ の台を共通に含む有界閉区間がある．そこで考えれば，$f_t \to f$ は一様収束なので，極限と積分の順序交換ができる．
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$g \in C_0(\mathbf{R})$ を $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ となるようにとる，g について (1) が使えばよい．

[4] 完備性以外は簡単．完備性もよくある論法でどの本にも出ている．