解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (3)

2010 年 11 月 8 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

平均点は 50 点，最高点は 80 点 (1 人) でした．簡単な解説をつけます．

[1] 普通に計算して，

$$\sum_{n\neq 0}\left(\frac{\pi^2(-1)^n i}{n}-\frac{6(-1)^n i}{n^3}\right)e^{inx}$$

となります．(収束は L^2-収束です．)

[2] (1) $f(x)$ は周期 π を持つので，n が奇数のとき $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx=0$ です．$n=2k$ (k は整数) とすると，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-2ikx}\,dx = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)e^{-2ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x/2)e^{-ikx}\,dx$$

となります．$x\in[-\pi,\pi]$ のとき，$f(x/2)=(\pi-|x|)/2$ であり，$|x|$ の Fourier 係数は 10/18 の授業でやったのでそれを使うと (あるいは直接でもすぐ計算できて)，上の式の値は

$$\begin{cases} \pi^2/2, & k=0 \text{ の時,}\\ 0, & k \text{ が偶数で } 0 \text{ でない時,}\\ \dfrac{2}{k^2}, & k \text{ が奇数の時,}\end{cases}$$

となります．よって，Fourier 級数展開は

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{\pi(2n+1)^2}e^{2(2n+1)ix}$$

となります．

(2) まず，一般論で上の級数は L^2-収束です．また，係数が絶対収束するので，一様収束でもあり，各点収束でもあります．

[3] 特性関数 $\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}$ の Fourier 係数は，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)e^{-inx}\,dx=\begin{cases} \pi, & n=0 \text{ の時,}\\ 0, & n \text{ が偶数で } 0 \text{ でない時,}\\ \dfrac{2(-1)^k}{|n|}, & |n|=2k+1 \text{ の時,}\end{cases}$$

です．よって，$\chi_{[-\pi/2,\pi/2]} * \chi_{[-\pi/2,\pi/2]} * \chi_{[-\pi/2,\pi/2]}$ の Fourier 級数展開は,

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}(e^{i(2n+1)x} + e^{-i(2n+1)x})$$

となります．この級数は，絶対一様収束しているので，この和が上の convolution に各点 x で等しくなります．Convolution を計算して答えを求めると，$x = 2n\pi + t$ $(0 \leq |t| \leq \pi$, n は整数) とおいたとき，答えは

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{4}\pi^2 - t^2\right), & 0 \leq |t| \leq \dfrac{\pi}{2} \text{ の時}, \\ \dfrac{\pi}{4}\left(t^2 - 2\pi|t| + \dfrac{3}{4}\pi^2\right), & \dfrac{\pi}{2} \leq |t| \leq \pi \text{ の時}, \end{cases}$$

となります.

[4] $f(x)$ の Fourier 係数は,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ の時}, \\ \dfrac{(-1)^n i}{n}, & n \neq 0 \text{ の時}, \end{cases}$$

です．よって，f を $4k$ 個 convolution したものの Fourier 係数は

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_k(x)e^{-inx}\,dx = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ の時}, \\ \dfrac{1}{n^{4k}}, & n \neq 0 \text{ の時}, \end{cases}$$

となります．この Fourier 係数は和が絶対収束しているので,

$$f_k(x) = \sum_{n \neq 0}\frac{1}{2\pi n^{4k}}e^{inx}$$

が各点 x で成り立ちます．$k \to \infty$ とすると，Lebesgue の収束定理が使えて，各点 x で

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \frac{1}{2\pi}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{\cos x}{\pi}$$

がわかります.