解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (2)

2010 年 11 月 1 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

最高点は 80 点 (1 人)，平均点は 30.5 点でした．簡単な解説を下につけます．積分の計算は，留数計算でやっている人がほとんどでした．もちろんそれでもできますが，Fourier 変換の問題なので，そうやった方が簡単にできます．

[1] $\chi_{[-1,1]}(x)$ の Fourier 変換は $(2\sin\xi)/\xi$ なので，この関数の L^2-norm について Plancherel の定理を使います．求める積分を I とおくと，$2 = 4I/(2\pi)$ となるので，答えは $I = \pi$ です．

[2] [1] で見たように，$\chi_{[-1,1]}(x)$ の Fourier 変換は $(2\sin\xi)/\xi$ なので，$\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-1,1]}$ の Fourier 変換が，$(4\sin^2\xi)/\xi^2$ です．これを逆変換して，$\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ の Fourier 変換は，$\pi\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}/2$ です．(ここで，$\xi = 0$ とおいたものが [1] の答えです．)

一般に，もし f が急減少関数であれば，xf の Fourier 変換は $i\hat{f}'$ でした．今，$\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ は急減少ではありませんが，もし同様にできたとすると，微分できない点は無視して，$\dfrac{\sin^2 x}{x}$ の Fourier 変換は $\pi i(\chi_{[-2,0]}(\xi) - \chi_{[0,2]}(\xi))/2$ と期待されます．

これが本当に答えであることは逆 Fourier 変換してみるとわかります．

[3] (1) $C_0(\mathbf{R})$ が，$L^2(\mathbf{R})$ で稠密であることより，授業でやったとおり平行移動が $L^2(\mathbf{R})$ で連続です．このことよりすぐに結論がわかります．

(2) $X = \{f * g \mid f, g \in L^2(\mathbf{R})\}$, $Y = \{\hat{f} \mid f \in L^1(\mathbf{R})\}$ とおきます．

まず，f が $\mathbf{R}$ 上の急減少関数の時，$f(x)e^{itx}$ の Fourier 変換は，$\hat{f}(\xi - t)$ です．(t は実数．) 急減少関数たちは，$L^2(\mathbf{R})$ で稠密であるので，このことは $f \in L^2(\mathbf{R})$ でもなりたちます．これと Plancherel の定理より，$f, g \in L^2(\mathbf{R})$ のとき，fg の Fourier 変換は，$\dfrac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$ となります．

ここで，f, g が，$L^2(\mathbf{R})$ 全体を動けば，fg が $L^1(\mathbf{R})$ 全体を動くので，$Y = X$ がわかります．

[4] $\dfrac{1}{\cosh x}$ の Fourier 変換は $\dfrac{\pi}{\cosh(\pi\xi/2)}$ であることを 10 月 18 日の授業でやりました．よって，$\dfrac{x^2}{2\cosh x}$ の Fourier 変換は $\left(\dfrac{-\pi}{2\cosh(\pi\xi/2)}\right)''$ です．$\xi = 0$ とおいて答えは $\pi^3/8$ です．