解析学 VI 期末テスト

2011 年 2 月 14 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

この試験は自筆ノート持ち込み可で行います．本，コピー等は不可です．

以下，実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[x]$ と書く．

[1] $L^1(\mathbf{R})$ において，f, g は 0 ではないが，$f * g$ は 0 となることがあるか．理由をつけて答えよ．ただしここで 0 とはベクトル空間 $L^1(\mathbf{R})$ における 0 元のことである．

[2] $\mathbf{R}$ 上の関数 $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ の Fourier 変換を求めよ．

[3] 2 以上の整数 k と $x \in [-\pi, \pi]$ に対し，

$$f_k(x) = 2 \sum_{n \in \mathbf{Z}, n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n^k} e^{inx}$$

とおく．授業で $f_2(x) = x^2 - \pi^2/3$ であることを示した．このとき次の問いに答えよ．

(1) k ごとに，有理数 $p_0, p_1, \ldots, p_{[k/2]}$ が存在して

$$f_k(x) = i^k \sum_{m=0}^{[k/2]} p_m \pi^{2m} x^{k-2m}$$

となることを示せ．

(2) $\dfrac{1}{\pi^{2k}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ は有理数であることを示せ．

[4] 実数 x に対し，関数 $(-1)^{[x]}$ を $\mathbf{R}$ 上の緩増加超関数と思ったものを T と書く．T の Fourier 変換を求めよ．

[5] 以下，$\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度を考えており，ほとんどいたるところ一致する関数は同一視する．

(1) $\mathbf{R}$ 上の L^1 関数 f で，$f * f = f$ を満たすものをすべて求めよ．

(2) $\mathbf{R}$ 上の コンパクト台超関数 T で，$T * T = T$ を満たすものをすべて求めよ．

(3) $\mathbf{R}$ 上の L^2 関数 f で，$f * f = f$ を満たし，定数関数 0 とは異なるものの例を一つ挙げよ．

[6] 正の整数 n と実数 x に対し，$f_n(x) = \exp(-n|x|)$ とおく．$f_1 * f_2 * \cdots * f_n$ はどの Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$ に入るか，答えよ．