解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (7)

2011 年 1 月 24 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

最高点は 85 点 (1 人)，平均点は 51.1 点でした．簡単な解説をつけます．

[1] 答えはいくらでもありますが，たとえば，$T = \delta_1 - \delta_0$ とおけば O.K. です．

[2] (1) 定義通りやればできます．

(2) Yes です．x がコンパクト集合を動くとき，$\varphi_k(x-y)$ の y の関数としての台は，ある共通のコンパクト集合に含まれます．そのため，$\langle T, \varphi_k(x-y) - \varphi(x-y)\rangle$ について k によらない評価ができるので，$(T * \varphi_k)(x) \to (T * \varphi)(x)$ のコンパクト集合上の一様収束が出ます．偏微分についても同じ論法が使えるので，$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ における収束が導かれます．

[3] まず，$\log|x|$ の超関数としての微分が p.v. $\dfrac{1}{x}$ であることがチェックできます．これを使うと，

$$(\log|x|)' * \chi_{[-1,1]} = (\log|x|) * (\chi'_{[-1,1]}) = (\log|x|) * (\delta_{-1} - \delta_1) = \log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

となります．最後の式は，局所可積分関数なので，それを超関数と思ったもののことです．これが答えです．

形式的に，$\dfrac{1}{x}$ を使って積分するとこの答えになりますが，$\dfrac{1}{x}$ は可積分でないので，これでは証明として不十分です．