解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (5)

2010 年 12 月 6 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

最高点は 85 点 (1 人)，平均点は 46.0 点でした．簡単な解説をつけます．

[1] $f(x)=\dfrac{\sin^2(x/2)}{x^2}$ に Poisson の和公式の証明法を適用します．($f(0)=1/4$ と，連続に定義します．) $\hat{f}(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\max(1-|\xi|,0)$ ですから，$F(x)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}f(x+2n\pi)$ とおくと，この無限和は一様絶対収束で，この Fourier 係数は，$\hat{f}(n)$ となります．よって，$F(x)$ の Fourier 級数展開は，$F(x)=1/4$ となります．x に $2x$ を代入して整理すれば，問題の式になります．

これは複素関数論でもよく知られた部分分数展開の式です．

[2] 条件を書き換えると，任意の試験関数 φ に対して $(f\varphi)^{(n)}(0)=0$ ということです．このための必要十分条件は $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$ です．

[3] Poisson の和公式より，$\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}e^{inx}=2\pi\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta_{2\pi n}$ でした．これを項別に 2 回微分したものより，$\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}n^2e^{inx}=-2\pi\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta''_{2\pi n}$ となります．

[4] $f_n(x)=\dfrac{\sin^2 nx}{nx^2}$ とおくと，この Fourier 変換は $\hat{f}_n(\xi)=\pi\max(1-|\xi|/2n,0)$ となります．よって，Plancherel の定理より，試験関数 φ に対して，$n\to\infty$ のとき，

$$\langle f_n,\varphi\rangle=\langle\frac{1}{2\pi}\hat{f}_n,\hat{\varphi}\rangle\to\langle\frac{1}{2},\hat{\varphi}\rangle=\pi\varphi(0)$$

となります．(Lebesgue の収束定理と，Fourier 逆変換公式を使いました．) これより，求める極限は $\pi\delta$ です．