解析学特別演習 II・小テスト解説 (4)

2007 年 12 月 17 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は，各問 25 点です．平均点は 31.2 点，最高点は 75 点 (1 人) でした．

[1] $0 < r < 1$ に対し，$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n r^{|n|} e^{inx}/2\pi$ を考えると，この級数は一様絶対収束して連続関数を表します．$r \to 1-$ のとき，一方では授業でやったことより，この関数は L^1-関数 f に L^1-収束し，他方ではこの関数は L^2-関数 $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{inx}$ (無限和は L^2-norm 収束) に L^2-収束します．よって，f は L^2 となります．

[2] 急減少関数である $f(x) = 1/\cosh\alpha x$ $(\alpha > 0)$ について Poisson の和公式を使います．この関数の Fourier 変換は授業でやったので，

$$2\pi \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\cosh 2n\alpha\pi} = \frac{\pi}{\alpha} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\cosh(n\pi/2\alpha)}$$

を得ます．$2\alpha = t$ とおいて整理すれば，$tf(\pi t) = f(\pi/t)$ が出ます．

[3] $[-\pi,\pi]$ 上の関数 x の Fourier 級数展開が

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},n\neq 0} i\frac{(-1)^n}{n} e^{inx}$$

であることより，x を自分自身と convolution して -2π でわったものが答えです．$[-\pi,\pi]$ の外では周期 2π に延長されていることに注意して計算すると，答えは $[0,2\pi]$ で $(x-\pi)^2/2 - \pi^2/6$ という関数を周期 2π で実数全体に延長したものになります．($[-\pi,\pi]$ の範囲で書くと $|x|$ が入った形になります．) 先に答えがわかればもちろんこれを Fourier 級数展開して問題の式が出ますが，ほかの方法としてはたとえば，$[0,2\pi]$ で ax^2+bx+c の形で探して係数を決めてもこの答えが出ます．

[4] [3] と同様の考察で，$[0,2\pi]$ で $(x-\pi)^3/6 - \pi^2(x-\pi)/6$ を Fourier 級数展開すると $\sum_{n\neq 0, n\in\mathbf{Z}} \frac{-i}{n^3} e^{inx}$ となります．これは一様絶対収束なので各点で等号が成立し，$x = \pi/2$ とおくと，答え $\pi^3/32$ が出ます．