

解析学特別演習 II・小テスト (3)

2007 年 11 月 6 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答は別紙に書いてください。学生証番号、氏名を一番上に書いてください。自筆ノートのみ持込可で行います。

以下のすべての問題で、考えている測度は Lebesgue 測度である。

[1]  $L^p(\mathbf{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , について, 内積を定義して, その内積から定まるノルムが通常の  $L^p$ -ノルムになるようにできるか。理由をつけて答えよ。

[2]  $L^1(\mathbf{R})$  において, 次の集合  $K$  を考える。

$$K = \left\{ f = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{n+1}{n} \chi_{[n-1, n]} \mid t_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

このとき次の問いに答えよ。

(1)  $K$  は,  $L^1(\mathbf{R})$  の閉凸集合であることを示せ。

(2)  $c = \inf \{ \|f\|_1 \mid f \in K \}$  を求めよ。

(3) 上の  $c$  について,  $c = \|f\|_1$  となる  $f \in K$  は存在しないことを示せ。

[3]  $f \in L^2(0, 2\pi)$  について, 下記の 2 条件は同値であることを示せ。

(1) 整数  $k$  について,  $c_k = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx$  とおいたとき, すべての自然数  $N$  に対して  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |k|^N |c_k|$  が収束する。

(2)  $f$  は, 周期  $2\pi$  の  $C^\infty$ -関数を,  $[0, 2\pi]$  に制限したものにほとんどいたるところ等しい。