解析学特別演習 II・小テスト (1) 解説

2007 年 10 月 15 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

最高点は 100 点 (1 人)，平均点は 51.4 点でした．簡単な解説を下につけます．

[1] (点数なし) 本を写していただけの人もいるし，この問題は点数には関係ないことにしましたが，非常に多くの人が間違えていました．これらの定理はこの授業で頻繁に使います．これらが身についていないと $\boxed{\text{ほぼ確実についていけなくなります}}$．怪しい人は $\boxed{\text{必ず}}$，よく復習しておいてください．

チェックでは可測かどうか，すべての点での収束かそれとも a.e. か，などはとりあえず問題としませんでした．重要な点は下記のとおりです．

(1) すべての関数の絶対値が共通の可積分関数で抑えられること

(2) 不等号の向きと，関数が正値であること (あるいは実数値可積分関数で下から抑えられること)

(3) 単調増大性と，関数が正値であること (あるいは実数値可積分関数で下から抑えられること)

(2) で不等号を逆向きに書いている人が少なからずいました．もし迷ったのだとしても，簡単な例 (たとえば $\chi_{[n,\infty)}$ など) で考えればどちら向きかわかるはずです．

[2] (40 点) $\mu(A) < \infty$ が必要十分条件です．

これが十分条件であることは Cauchy-Schwarz の不等式からわかります．

必要条件であることは次のようにわかります．$\mu(A) = \infty$ であったとすると，任意に与えられた k に対し，十分大きな n をとって $[-n,n] \cap A$ を考えることにより，可測集合 $B \subset A$ で，$k < \mu(B) < \infty$ となるものが取れます．これを繰り返し使うことにより，互いに disjoint な可測集合 A_n $(n = 1,2,3,\dots)$ で，$A_n \subset A$, $n^2 < \mu(A_n) < \infty$ となるものが取れます．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}$$

とおくと，$\int f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$ ですが，$\int f(x)^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu(A_n) < \infty$ となります．

[3] (20 点 ×3)

(1) は大変有名なもので，この授業で繰り返し使います．(2) もどこにでも出ているもので，こちらもこの授業で出てきます．(3) も典型的なパターンの留数計算です．どこにでも出ていることので，解説は簡単に書きます．これもできなかった人はよく復習しておいてください．

(1) この積分を二つかけて $\mathbf{R}^2$ 上の積分にして，極座標に直すと不定積分できる形になります．答えは $\sqrt{\pi}$ です．

(2) 原点中心，半径 N で上半平面にある半円板から，原点中心，半径 ε で上半平面にある半円板を除いたものの境界で積分し，留数計算で $N \to \infty, \varepsilon \to 0$ とします．大きい半円周の上の線積分が 0 に行き，小さい半円周の上の線積分から π が出ます．答えは π です．

(3) 原点中心，半径 N で上半平面にある半円板の境界上で積分して留数計算します．$N \to \infty$ としたとき，半円周上の積分は 0 に行き，$z = i$ での留数から，答えは $\pi/2$ となります．