解析学 VI 期末テスト解答解説

2008 年 2 月 7 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

期末試験の配点は，各問 25 点の 150 点満点です．平均点は，57.0 点，最高点は 133 点 (1 人) で得点分布は次のとおりでした．

0–19 (点)	20–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
2(人)	13	3	6	6	4	4	1	4

成績との対応は，40 点未満が D，40 点〜59 点が C，60〜79 点が B，80 点以上が A です．ただし，演習の小テストの成績からプラスアルファがついている人が 3 人います．この結果，A, B, C, D の人数はそれぞれ，9, 10, 12, 12 人となりました．この成績が点数と共に赤字で答案左上に書いてあります．また演習の成績は最初に言ったとおり，7 回分のうち 1 番悪い 1 回分を除いた平均点でつけます．この点数の最高点は 86 点 (1 人)，平均点は 48.7 点で，その分布は次のとおりです．(ただし欠席の回は 0 点として，4 回以上受けた人をカウントしています．)

0–19 (点)	20–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89
0(人)	12	3	6	4	2	3

この点数の成績との対応は，30 点未満が D，30 点〜49 点が C，50〜64 点が B，65 点以上が A となっており，この成績が点数と共に青字で答案右上に書いてあります．ただし，こちらも期末試験がよくできたことによるプラスアルファがついている人が 1 人います．この結果，A, B, C, D の人数はそれぞれ，7, 8, 10, 5 人となりました．ただし，解析学特別演習 II は Weiss 先生との共同担当なので，この成績に Weiss 先生の分を総合したものが実際の成績表につくものとなります．

以下略解，解説をつけます．簡単に示せるところの説明は簡単にすませてあります．実際の答案でもそのあたりはあまり厳しくつけてありません．

[1] (1) 普通に計算して $a_0 = 8\pi^3/3$, $n \neq 0$ のとき $a_n = 4\pi^2 i/n + 4\pi/n^2$ となります．

(2) 一様収束していれば $f(0) = f(2\pi)$ となるはずですが，そうなっていないので，一様収束していません．(一様絶対収束しているかを聞いているのではないので，「$\sum_n |a_n| = \infty$ だから」では理由として不十分です．)

(3) f が L^2 なので一般論より L^2-収束しています．

(4) f が $(0, 2\pi)$ で微分可能で，微分したものが有界なので，一般論より f に $(0, 2\pi)$ 上で各点収束しています．したがってほとんどいたるところ f に収束しています．

[2] Fourier 変換すると，$(\hat{f})^2 = \hat{f}$ より，$\hat{f}$ のとりうる値は $0, 1$ ですが，$\hat{f}$ は連続関数なので，定数関数 0 か 1 に等しいことになります．(連続性を使わないでいきなりこれを結論するのは飛躍です．) 無限遠点で 0 にならないといけないので，$\hat{f} = 0$ すなわち $f = 0$ (定数関数) が導かれ，逆にこのとき $f * f = f$ であることは明らかです．

[3] 各 $n \in \mathbf{Z}$ に対し，コンパクト台の C^∞ 関数 φ_n で，$\operatorname{supp} \varphi_n \subset [n-2/3, n+2/3]$, $[n-1/3, n+1/3]$ 上で $\varphi_n(x) = 1$, $\sum_n \varphi_n(x) = 1$ となるものが取れます．このとき，$T = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varphi_n T$ で，$\operatorname{supp} \varphi_n T \subset \{n\}$ となっています．このとき，ある自然数 m_n と，複素数 $c_{n,0}, c_{n,1}, \ldots, c_{n,m_n}$ があって，$\varphi_n T = \sum_{k=0}^{m_n} c_{n,k} \delta_n^{(k)}$ となります．これより，$T = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \sum_{k=0}^{m_n} c_{n,k} \delta_n^{(k)}$ となります．収束に問題はなく，この形のものが超関数を与えて，$\operatorname{supp} T \subset \mathbf{Z}$ となることはすぐわかります．(m_n は n に依存しています．これをただ m と書いてはいけません．)

[4] (1) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$, $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$ の特性関数をそれぞれ，χ_+, χ_- とします．

$e^{-\xi}\chi_+(\xi)$ の Fourier 逆変換が $\frac{i}{2\pi(x+i)}$ であることより，$\frac{\pm i}{x \pm i}$ の Fourier 変換は $2\pi\chi_\pm(\xi)e^{-|\xi|}$ となります．これを x のところを 1 次式で変数変換することにより，答えは，α の虚部が正のとき，$-2\pi i e^{i\alpha\xi}\chi_+(\xi)$, α の虚部が負のとき，$2\pi i e^{i\alpha\xi}\chi_-(\xi)$ です．

(2) $\beta = \exp(\pi i/4)$ とおくと

$$\frac{4}{1+x^4} = \frac{-\beta}{x-\beta} + \frac{-\beta^3}{x-\beta^3} + \frac{-\beta^5}{x-\beta^5} + \frac{-\beta^7}{x-\beta^7}$$

であることより，(1) を使って，

$$\begin{aligned}
&\chi_+(\xi)\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-\xi/\sqrt{2}}((1-i)e^{i\xi/\sqrt{2}} + (1+i)e^{-i\xi/\sqrt{2}}) \\
&+\chi_-(\xi)\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{\xi/\sqrt{2}}((1-i)e^{-i\xi/\sqrt{2}} + (1+i)e^{i\xi/\sqrt{2}}) \\
&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-|\xi|/\sqrt{2}}(\cos(|\xi|/\sqrt{2}) + \sin(|\xi|/\sqrt{2}))
\end{aligned}$$

が答えです．

直接留数計算に持っていっても，ξ の正負で積分路の半円の取り方が分かれ，極が半円内に二つあるので，ほぼ同じ計算になります．

[5] (1) 試験関数 $\varphi(x)$ を取ります．

$$\langle \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \hat{\varphi}(-n)$$

となりますが，まず $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ なのでこの右辺は $N \to \infty$ のとき収束します．さらに，$\mathcal{D}(\mathbf{R})$ において $\varphi_k \to 0$ であるとき，$\mathcal{S}(\mathbf{R})$ においても $\varphi_k \to 0$ なので，$\mathcal{S}(\mathbf{R})$ において $\hat{\varphi}_k \to 0$ となります．このとき $\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_k(-n) \to 0$ なので，S が超関数として定まります．またこの計算から，超関数列としての収束もわかります．

(2) $T=S$ を示します．試験関数 $\varphi(x)$ に対して

$$\langle S,\varphi\rangle=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{a_n}{2\pi}\hat{\varphi}(-n)$$

です．一方，$\tilde{\varphi}(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\varphi(x+2n\pi)$ とおけば，これは C^∞-関数を与えます．このとき，

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_0^{2\pi}f(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx$$

であることと，$\overline{\tilde{\varphi}(x)}$ の Fourier 係数が $\overline{\hat{\varphi}(-n)}$ であることより，f が L^2-関数であれば，$\langle S,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle$ が成り立っていることがわかります．任意の $L^1([0,2\pi])$ の元 f は，L^1-norm で $L^2([0,2\pi])$ の元で近似できるので，結論の等式を得ます．

[6] Fourier 変換することにより，$\hat{T}=\sum_{n=0}^{\infty}2\pi a_n i^n\delta^{(n)}$ を得ます．この右辺は $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ における収束です．右辺を有限和で止めたものの台は $\{0\}$ に含まれるので，$\hat{T}$ の台も $\{0\}$ に含まれることになります．よって，$\hat{T}=\sum_{n=0}^{N}b_n\delta^{(n)}$ の形でなくてはなりません．原点の近傍で x^n に等しい試験関数を使うことにより，$n>N$ のとき，$a_n=0$ であることがわかります．