解析学 VI 期末テスト

2008 年 2 月 4 日 13:00–16:00

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は解答用紙に書いてください．自筆ノートのみ持込可で行います．

[1] $[0,2\pi]$ 上の関数 $f(x)=x^2$ を考える．

(1) $f(x)$ の Fourier 係数

$$a_n=\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

を求めよ．(n は任意の整数である．)

(2) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ は，$N\to\infty$ のとき，$f(x)$ に $[0,2\pi]$ 上で一様収束しているか．理由をつけて答えよ．

(3) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ は，$N\to\infty$ のとき，$f(x)$ に $[0,2\pi]$ 上で L^2-収束しているか．理由をつけて答えよ．

(4) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ は，$N\to\infty$ のとき，$f(x)$ に $[0,2\pi]$ 上でほとんどいたるところ収束しているか．理由をつけて答えよ．

[2] $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 可積分関数であるとし，$f*f=f$ が成り立っているとする．このような f をすべて求めよ．

[3] $\mathbf{R}$ 上の超関数で，台が $\mathbf{Z}$ に含まれるものをすべて求めよ．ただし，$\mathbf{Z}$ は整数全体の集合である．

[4] (1) α を虚部が 0 でない複素数として，$\mathbf{R}$ 上の L^2-関数 $\displaystyle\frac{1}{x+\alpha}$ の Fourier 変換を求めよ．

(2) $\mathbf{R}$ 上の関数 $\displaystyle\frac{1}{x^4+1}$ の Fourier 変換を求めよ．

[5] $f(x)$ を $[0,2\pi)$ 上の L^1-関数とし，これを周期 2π で $\mathbf{R}$ 全体に拡張した関数を超関数とみなしたものを T とする．また，$f(x)$ の Fourier 係数 a_n ($n\in\mathbf{Z}$) を

$$a_n=\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

と定める．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ を $\mathbf{R}$ 上の超関数とみなしたものは，$N\to\infty$ のとき，ある超関数 S に収束することを示せ．

(2) T と S は超関数として等しいか．理由をつけて答えよ．

[6] $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を複素数列とする．$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $\mathbf{R}$ 上の緩増加超関数としてある $T\in\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ に収束したとする．このとき数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は有限個を除いて 0 であることを示せ．