解析学特別演習 II・小テスト解説 (7)

2008 年 1 月 30 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は各問 25 点です．平均点は 48.1 点，最高点は 100 点 (1 人) でした．

[1] $(T*\varphi)(x)=\langle T,\tau_x\check{\varphi}\rangle$ なので，$T$ は，試験関数 $\tau_x\check{\varphi}$ に $\varphi'(x)$ を対応させていることになります．これはすなわち，$\varphi$ に対して $-\varphi'(0)$ を対応させているということです．よって，$T=\delta'$ です．

[2] $T''+T=0$ を Fourier 変換して，$(1-\xi^2)\hat{T}=0$ を得ます．これは，$\hat{T}=a\delta_1+b\delta_{-1}$ の形であることを意味します．($a,b$ は複素定数です．) 逆 Fourier 変換して，$T=ae^{ix}+be^{-ix}$ となります．($a,b$ は任意の定数なので $2\pi$ は無視しました．)

[3] $\langle T,\tau_x\check{\varphi}\rangle=\langle 1,\tau_x\check{\varphi}\rangle$ が任意の試験関数 $\varphi$ に対して成り立つので，$T=1$ です．(右辺は定数関数 1 を表しています．)

[4] 超関数として $f$ を 2 回微分すると，$f''=\delta_{-2}-2\delta_{-1}+2\delta_1-\delta_2$ を得ます．これを Fourier 変換して，$-\xi^2\hat{f}(\xi)=e^{2i\xi}-2e^{i\xi}+2e^{-i\xi}-e^{-2i\xi}$ となります．$f,f'$ の Fourier 変換が $L^2$ であることより，$\hat{f}(\xi)=(4i\sin\xi-2i\sin 2\xi)/\xi^2$ となります．これより求める答えは $s<3/2$ です．