解析学特別演習 II・小テスト解説 (5)

2007 年 12 月 17 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は，各問 25 点です．平均点は 46.4 点，最高点は 100 点 (2 人) でした．

[1] そのような $f(x)$ が存在したとすると，階段関数を C_0^∞-関数で近似することにより，任意の $t>0$ に対して $\int_{-t}^{t} f(x)\,dx = 1$ でなくてはいけません．ここで $t \to 0$ とすれば積分の絶対連続性より左辺の極限は 0 となるので矛盾です．

[2] T の 2 階微分が 0 とすると，T' が超関数としてある定数 a に等しいので，$T-ax$ の超関数としての微分が 0 になります．これより $T-ax$ がある定数 b に等しくなり，$T=ax+b$ を得ます．以下同様に帰納法により，T は多項式に等しくなります．

[3] $x=n\pi$ のところに気をつけて部分積分すれば，答えは $-|\sin x| + 2\sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta_{n\pi}$ となります．(一つの試験関数については，有限個の n しか関係しないので収束の問題はありません．)

[4] 試験関数 φ に対し，

$$\int \varphi(x) \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \int \varphi(\varepsilon x) f(x)\,dx$$

となります．$\varphi(\varepsilon x)$ は有界で，$f(x)$ は可積分なので，$\varepsilon \to 0+$ としたときに Lebesgue の収束定理が使えて，右辺の極限は $\varphi(0)\int f(x)\,dx$ となります．よって答えは $(\int f(x)dx)\delta$ です．