解析学特別演習 II・小テスト解説 (4)

2006 年 12 月 4 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

採点は Teaching Assistant の石谷君です．平均は 59 点，最高は 100 点 (3 人) でした．簡単な解説をつけます．

[1] (20 点) どの本にでも出ているのでここでは省略します．σ-有限性などの仮定が本来必要ですが，そこは減点していません．

[2] (30 点) たとえば，$L^2(\mathbf{R})$ の元だが $L^1(\mathbf{R})$ の元ではないような f, g をとればだいじょうぶです．(2) は Cauchy-Schwarz からわかり，(3) は Cauchy-Schwarz と，$L^2(\mathbf{R})$ における平行移動の連続性 (前回の [2]) からわかります．

[3] (5 点 $\times 4$) (1) 単に計算して

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0} \frac{2(1+\pi i n)}{n^2} e^{inx}.$$

(2) $f(0) \neq f(2\pi)$ なので各点収束していません．
(3) $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ なので，一般論で L^2-収束しています．
(4) (2) より一様絶対収束していません．

[4] (30 点) 自然数 n について $g_n(x) = \chi_{[-n,n]}(x)g(x)$ とおきます．$g_n \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ と，$\|g_n - g\|_2 \to 0$ に注意します．まず，$\|g_n - g\|_2 \to 0$ より，$\|\hat{g}_n - \hat{g}\|_2 \to 0$ がわかり，部分列に移ることにより，ある狭義単調増大数列 $\{n_k\}$ に対し $\hat{g}_{n_k}(\xi) \to \hat{g}(\xi)$, $(k \to \infty)$ がほとんどいたるところ成立します．一方，Hausdorff-Young の不等式より，$\|f * g_n - f * g\|_2 \to 0$ なので，$\|\widehat{f * g_{n_k}} - \widehat{f * g}\|_2 \to 0$ がわかり，これは $\|\hat{f}\hat{g}_{n_k} - \widehat{f * g}\|_2 \to 0$ を意味します．もう一度，$\{n_k\}$ の部分列 $\{m_k\}$ に移って，$\hat{f}(\xi)\hat{g}_{m_k}(\xi) \to \widehat{f * g}(\xi)$ がほとんどいたるところ成立します．一方，ほとんどいたるところ，$\hat{f}(\xi)\hat{g}_{m_k}(\xi) \to \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ なので，$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \widehat{f * g}(\xi)$ がほとんどいたるところ成り立ちます．