

解析学特別演習 II・小テスト (4)

2006 年 11 月 20 日 10:00–12:15

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

この試験はノート持ち込み可で行います。解答は別紙に書いてください。学生証番号、氏名を一番上に書いてください。

[1] Fubini の定理のステートメントを書け。(いろいろな形があるが、一番単純な形でよい。)

[2] 次のすべての条件を満たす関数 $f(x), g(x)$ の例を挙げよ。条件を満たしていることをきちんと説明すること。

(1) f, g はいずれも \mathbf{R} 上の可測関数だが $L^1(\mathbf{R})$ の元ではない。

(2) すべての $t \in \mathbf{R}$ に対し、 $f(t-x)g(x)$ が x の関数として可積分である。

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx$ が t の連続関数である。

[3] $[0, 2\pi]$ 上の関数 $f(x) = x^2$ について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を Fourier 級数に展開せよ。

(2) (1) の級数は、 $f(x)$ に各点収束しているか。簡単な理由をつけて答えよ。

(3) (1) の級数は、 $f(x)$ に L^2 -収束しているか。簡単な理由をつけて答えよ。

(4) (1) の級数は、 $f(x)$ に一様絶対収束しているか。簡単な理由をつけて答えよ。

[4] $f \in L^1(\mathbf{R}), g \in L^2(\mathbf{R})$ であるとき、 $f * g$ の Fourier 変換と、 $\hat{f}\hat{g}$ はほとんどいたるところ一致することを示せ。