

解析学特別演習 II・小テスト (3)

2006 年 11 月 13 日 10:00–12:15

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

この試験はノート持ち込み可で行います。解答は別紙に書いてください。学生証番号、氏名を一番上に書いてください。

[1] 次の式を示せ。(10月23日の講義で既知として使ったものである。)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

[2]  $f \in L^p(\mathbf{R})$ ,  $1 < p < \infty$ , に対し,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|^p dx = 0$$

を示せ。

[3]  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  に対し,  $f * f * \dots * f$  を求めよ。(  $f$  の数は  $k$  個とする。 )

[4]  $\mathbf{R}$  上の実数値を取る連続な可積分関数  $f(x)$  が次の 2 条件をみたすとする。このような  $f(x)$  をすべて求めよ。

(1) 任意の正の整数  $k$  に対し,

$$k(f * f * \dots * f)(x) = f\left(\frac{x}{k}\right)$$

が成り立つ。ただしここで,  $*$  は関数の畳み込み (convolution) を表し, 左辺には  $f$  が  $k$  回現れている。

(2)  $f(x) = f(-x)$ .