解析学特別演習 II・小テスト解説 (2)

2006 年 10 月 30 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

採点は Teaching Assistant の石谷君です．平均は 45 点，最高は 80 点 (3 人) でした．簡単な解説をつけます．

[1] (20 点) (X, μ) を測度空間とし，関数 $f(x,t)$, $x \in X, t \in (a,b)$ を考える．これが任意の固定した t に対して x の関数として可積分，任意の固定した x に対して t の関数として微分可能とする．また，X 上の可積分関数 $g(x)$ が存在して，$\left|\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \le g(x)$ が $X \times (a,b)$ 上成り立つとする．このとき $\displaystyle\int_X f(x,t)\ d\mu(x)$ は t の関数として (a,b) 上微分可能で，

$$\frac{d}{dt}\int_X f(x,t)\ d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\ d\mu(x)$$

がなりたつ．

[2] (30 点) 一つずつ処理していけば数学的帰納法で問題なくできます．答えは，$\sqrt{\dfrac{\pi^{k-1}}{k}} e^{-x^2/k}$ です．Fourier 変換してもできます．

[3] (10 点 $\times 3$)

(1) 誤り．たとえば，$f(x) = 1/(1+x^2)$, $g(x)$ は授業でやった，常に $g(x) \ge 0$ となる $C_0^\infty(\mathbf{R})$ の元で恒等的にはゼロでない関数とすれば，$f * g$ はすべての点で値が正となります．

(2) 正しい．$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) g(x-y)\ dy$ とすれば，授業でやったように積分記号下の微分が何回でもできるので，結論を得ます．

(3) 正しい．$f \in C_0(\mathbf{R})$ の場合は $f * g \in C_0(\mathbf{R})$ であることが簡単にわかります．$f \in L^1(\mathbf{R})$ のときは，$f_n \in C_0(\mathbf{R})$, $\|f - f_n\|_1 \to 0$ となるように $\{f_n\}$ を選ぶと，$\|f * g - f_n * g\|_\infty \le \|g\|_\infty \|f - f_n\|_1 \to 0$ となるので，$f * g$ も $C_\infty(\mathbf{R})$ の元となります．

[4] (20 点)

存在する．例は次のとおりです．

$f(x) = g(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ とおきます．(原点での値はどうでもいいので，たとえば 0 にしておきます．) このとき $\lim_{t \to 0+} f * g(t) = \infty$ を示せば十分です．(こうであれば，測度ゼロの集合上で値を取り替えても原点の近傍で有界にはできないからです．)

$f * g$ は具体的に積分を書くことも可能ですが，次のように評価できます．$0 < t < 1/2$ のとき，

$$f * g(t) \ge \int_t^{t+1/2} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x-t}}\ dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x+t}} \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$$

となりますが，最後の式は単調収束定理により $t \to 0+$ のとき，無限大に発散します．