解析学特別演習 II・小テスト (2)

2006 年 10 月 23 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．

[1] Lebesgue 積分論において,「積分記号下での微分」を正当化する定理のステートメントを書け.

[2] $f(x) = e^{-x^2}$ に対し，$f * f * \cdots * f$ を求めよ．(f の数は k 個とする．)

[3] 次のそれぞれの命題は正しいか．正しければ証明し，誤っていれば反例を挙げよ．きちんと理由も示すこと．(実軸上で，$\mathcal{S}(\mathbf{R})$ は Schwartz の急減少関数の空間, $C_0(\mathbf{R})$ はコンパクト台の連続関数の空間，$C_\infty(\mathbf{R})$ は無限遠で 0 になる連続関数の空間を表す．)

(1) $f \in L^1(\mathbf{R})$, $g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ ならば $f * g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$.
(2) $f \in L^1(\mathbf{R})$, $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ ならば $f * g \in C^\infty(\mathbf{R})$.
(3) $f \in L^1(\mathbf{R})$, $g \in C_0(\mathbf{R})$ ならば $f * g \in C_\infty(\mathbf{R})$.

[4] 次の条件を満たす $f(x), g(x) \in L^1(\mathbf{R})$ の例はあるか．あるならば具体的に挙げよ．ないのならば，存在しないことを示せ．
「ほとんどいたるところ $f * g(x) = h(x)$ となる，$\mathbf{R}$ 上の連続関数 $h(x)$ は存在しない.」