解析学特別演習 II・小テスト解説 (1)

2006 年 10 月 16 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

採点は Teaching Assistant の石谷君です．平均は 53 点，最高は 100 点 (1 人) でした．簡単な解説をつけます．

[1] (20 点) (X, μ) を測度空間とし，$\{f_n(x)\}_n$ をその上の，非負可測関数列とすると，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ d\mu \geq \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ d\mu.$$

「可測」などは書いてなくてもいいことにしました．また $\mathbf{R}$ や $\mathbf{R}^n$ で書いてあってもいいことにしました.「非負」(あるいは，可積分関数で下からおさえられる）がないものは 0 点です．不等式が逆向きなのももちろん 0 点です．

思ったよりかなり悪いできでした．講義でも言ったように，Lebesgue 積分がよくわかっていないとたいへん苦しいことになります．よく復習しておいてください．

[2] (20 点) たとえば，$f_n = \chi_{[n,n+1]}$ とおけば，(1), (2), (3) は明らかで，$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\ dx = 1$ なのでもちろん 0 には収束しません．

ほかにももちろん簡単な例はたくさんあります．

[3] (20 点) (3) は,「$f(x)$ に $\mathbf{R}$ 上ほとんどいたるところ一致する連続関数は存在しない」と書くべきところでした．問題の形だと，$f_n(x) = 0$, $f(x) = \chi_{\{0\}}(x)$ というような自明な例で O.K. になってしまいます．(問題をこの形で書いてしまったので，もちろんこのような例でも採点は満点にしてあります．)

(3) を上のように書き直すと，たとえば

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq 1/n \text{ の時,} \\ 1, & 1/n \leq x \leq 1 - 1/n \text{ の時,} \\ n - nx, & 1 - 1/n \leq x \leq 1 \text{ の時,} \\ 0, & \text{その他の時,} \end{cases}$$

として，$f = \chi_{[0,1]}$ としたものが答えになります．(1), (2) は明らかで，(3) ですが，もし $f(x)$ に $\mathbf{R}$ 上ほとんどいたるところ一致する連続関数 $g(x)$ があったとすると，

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ の時,} \\ 0, & x < 0 \text{ の時,} \end{cases}$$

でなくてはなりませんが，これでは $x = 0$ で連続になりません．

[4] (20 点) 半開区間 $[-n, n[$ を n^2 等分した，おのおの長さ $2/n$ の半開区間たちを左から $E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \ldots, E_{n^2}^{(n)}$ とします．

$$E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \ldots, E_4^{(2)}, E_1^{(3)}, \ldots, E_9^{(3)}, E_1^{(4)}, \ldots$$

と並べたものの特性関数を順に $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ とします．すると，(1) は明らかで，$E_k^{(n)}$ の長さが $2/n$ であることより，(2) もわかります．ついで (3) ですが，どの $x \in \mathbf{R}$ についても，数列 $\{f_n(x)\}_n$ は 1 を無限個含むことからわかります．

これはあまりできていませんでした.「L^1-収束していれば，ある部分列はほとんどいたるところ各点収束」ですが，この例は部分列に移る必要が本当にあることを示しています．

[5] (5 点 ×4)

(1) 誤り．(0, 1) 区間の有理数に番号を振ったものを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とします．

$$E = (0,1) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n - \frac{1}{2 \cdot 3^n}, a_n + \frac{1}{2 \cdot 3^n})$$

とおくと，

$$\mu(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

となりますが，もちろん E は開集合であり，すべての有理数を含むので稠密でもあります．

たいへん多くの人が「正しい」と間違えていました．

(2) 正しい． $E = \{x \in (0,1) \mid f(x) > 0\}$，$E_n = \{x \in (0,1) \mid f(x) \ge 1/n\}$ とおくと，

$$0 \le \frac{1}{n}\mu(E_n) \le \int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

より，$\mu(E_n) = 0$ となります．よって $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ より，$\mu(E) = 0$ もわかります．

これは基本的な事項ですが，証明はあまりよくはできていませんでした．

(3) 誤り．Cantor 集合を考えます．すなわち，(0, 1) 区間内で 3 進小数展開したときに，0, 2 だけしか現れない実数たちの集合を E とします．(3 進小数展開が二通りできる数は可算個しかないので，以下の議論に気にしなくてかまいません．) これらは，0, 2 を可算個並べてできる数たちなので，連続濃度だけあります．しかし，Lebesgue 測度を考えると，(0, 1) 区間から，真ん中の長さ 1/3 の区間を抜いて，次に残りの長さ 1/3 の 2 区間から，それぞれその真ん中の長さ $1/3^2$ の区間を抜いて，さらに，残りの長さ $1/3^2$ の 4 区間から，それぞれその真ん中の長さ $1/3^3$ の区間を抜いて $\cdots$ と続けていけば E との違いはたかだか可算集合です．この集合 E は可測で，その測度は $2^n/3^n$ で抑えられるので，結局 0 となります．

(4) 誤り．$\chi_{(0,\infty)} - \chi_{(-\infty,0)}$ を考えれば簡単な反例になります．$(\sin x)/x$ でもできますが，極限の存在がそれほど自明ではなくなります．