解析学 VI 期末テスト解答解説

2007 年 2 月 7 日 13:00–16:00
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

期末試験の配点は，各問 30 点の 180 点満点です．最高点は 130 点 (1 人) で得点分布は次のとおりでした．

0–19 (点)	20–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
7(人)	3	2	5	3	1	0	2	5

平均点は 54.4 点でした．成績との対応は，40 点未満が D，40 点〜59 点が C，60〜79 点が B，80 点以上が A です．ただし，演習の小テストの成績が特に良かったのでプラスアルファがついている人が 2 人います．この結果，A, B, C, D の人数はそれぞれ，8, 4, 6, 10 人となりました．また演習の成績は最初に言ったとおり，7 回分のうち 1 番悪い 1 回分を除いた平均点でつけ，この点数 (を四捨五入したもの) が返却答案に青字で書いてあります．この点数の最高点は 89 点 (1 人) で，その分布は次のとおりです．(ただし欠席の回は 0 点として，一度でも受けた人は表に入っています．)

0–19 (点)	20–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89
11(人)	4	4	6	3	2	4

この点数の成績との対応は，29 点未満が D，30 点〜54 点が C，55〜74 点が B，75 点以上が A となっており，この成績が青字で書いてあります．ただし，こちらも期末試験がよくできたことによるプラスアルファがついている人が 2 人います．この結果，A, B, C, D の人数はそれぞれ，8, 5, 6, 15 人となりました．ただし，解析学特別演習 II は俣野先生との共同担当なので，この成績に俣野先生の分を総合したものが実際の成績表につくものとなります．

以下略解，解説をつけます．簡単に示せるところの説明は簡単にすませてあります．実際の答案でもそのあたりはあまり厳しくつけてありません．

[1] $\mathrm{supp}\, T \subset \{1, 2\}$ であることは簡単にわかります．これより T は，δ_1, δ_2 の微分たちの 1 次結合であることが，授業でやった $\mathrm{supp}\, T = \{0\}$ の場合と同様にして示せます．あとはやはり授業でやった $xT = 0$ の場合と同様にして，$T = a\delta_1 + b\delta_1' + c\delta_2$ であることがわかります．(a, b, c は任意の定数．) この形の T が問題の条件を満たしていることは明らかです．

[2] この問題は一人しかできていませんでした．(2) から (1) が出ることは自明なので問題は逆です．気持ちとしては，$f = g * h$ のときに Fourier 変換して，$\hat{f} = \hat{g}\hat{h}$

より，$\hat{g}\hat{h}=(\hat{k})^2$ となる $k\in L^2(\mathbf{R})$ を取れば，$f=k*k$ となるはずですが，今 f は一般に L^1 でも L^2 でもないのでこのようにFourier 変換はできません．緩増加超関数と思えば Fourier 変換はできますが，授業でやったことからはただちには，$\hat{f}=\hat{g}\hat{h}$ は出ません．そこで何らかの工夫が必要ですが，2 つの解法を示します．

(1) $g*h(x)$ を，$h(y)$ と $\overline{g(x-y)}$ の y の関数としての内積だと思って，Plancherel の定理を適用します．このとき，$\overline{g(x-y)}$ を y の関数と思って Fourier 変換したものは，$e^{-ix\xi}\overline{\hat{g}(\xi)}$ であることが簡単にわかります．これより，Plancherel の定理によって，

$$(g*h)(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}\hat{g}(\xi)\hat{h}(\xi)\,d\xi$$

を得ます．ここで，$\hat{g}(\xi)\hat{h}(\xi)$ は L^1-関数なのでこの平方根を逆 Fourier 変換したものを $k(x)\in L^2(\mathbf{R})$ とおくことができます．(平方根は可測にさえすればどうとってもかまいません．) このとき，$\hat{g}(\xi)\hat{h}(\xi)=\hat{k}(\xi)\hat{k}(\xi)$ となっているので，上の等式より，

$$(g*h)(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}\hat{k}(\xi)\hat{k}(\xi)\,d\xi$$

となりますが，Plancherel の定理を使うところを逆にたどれば右辺は $(k*k)(x)$ に等しくなります．

(2) まず，11 月 20 日の小テスト [4] より，一般に，$f\in L^1(\mathbf{R}), g\in L^2(\mathbf{R})$ のとき $\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g}$ であったことを思い起こします．

$g,h\in L^2(\mathbf{R})$ に対し $f=g*h$ と書けたとしましょう．(1) と同様に，$\hat{g}(\xi)\hat{h}(\xi)=\hat{k}(\xi)\hat{k}(\xi)$ となる $k\in L^2(\mathbf{R})$ を取ります．正の ε に対し，$\phi_\varepsilon(x)=e^{-\varepsilon x^2}$ とおきます．$\varepsilon\to 0$ のとき $L^2(\mathbf{R})$ において $\phi_\varepsilon g\to g$ なので，$L^2(\mathbf{R})$ において $\widehat{\phi_\varepsilon g}\to\hat{g}$ です．これより，$L^1(\mathbf{R})$ において $\widehat{\phi_\varepsilon g}\hat{h}\to\hat{g}\hat{h}$ となります．今，$\phi_\varepsilon g\in L^1(\mathbf{R}), h\in L^2(\mathbf{R})$ なので，最初の注意から $\widehat{\phi_\varepsilon g}\hat{h}=\widehat{(\phi_\varepsilon g)*h}$ となります．$L^1(\mathbf{R})$ において $\widehat{(\phi_\varepsilon g)*h}\to\hat{g}\hat{h}$ であることに，Fourier 逆変換をほどこし，$L^1(\mathbf{R})\cap L^2(\mathbf{R})$ 上では，Fourier 逆変換は L^1 と思っても L^2 と思っても同じであることに注意すると，$(\phi_\varepsilon g)*h\to\mathcal{F}^*(\hat{g}\hat{h})$ が一様収束でなりたちます．ただしここで，$\mathcal{F}^*$ は Fourier 逆変換を表します．$L^2(\mathbf{R})$ において $\phi_\varepsilon g\to g$ ですから，$(\phi_\varepsilon g)*h\to g*h$ が一様収束でなりたちます．これより，$g*h=\mathcal{F}^*(\hat{g}\hat{h})$ となり，あとは (1) と同じです．

[3] この問題は [2] と関連しています．こちらも一人しかできていませんでした．

[2] で示したことを見れば，どちらの解法でも

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,d\xi$$

となっています．この右辺は，L^1-関数 $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ の Fourier 逆変換です．今，$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ が L^2 でもあると仮定されていて，Fourier 逆変換は $L^1(\mathbf{R})\cap L^2(\mathbf{R})$ 上では，L^1 と思っても L^2 と思っても同じであったので，左辺の $f*g$ は L^2-関数の Fourier 逆変換として，L^2 になります．Fourier 変換で戻せば，$\widehat{f*g}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ がわかります．

[4] $\chi_{[-1,1]}$，$\chi_{[-2,2]}$ の Fourier 変換がそれぞれ，$\dfrac{2\sin\xi}{\xi}$，$\dfrac{2\sin 2\xi}{\xi}$ であることより，$\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-2,2]}$ の Fourier 変換は，$\dfrac{4\sin\xi\sin 2\xi}{\xi^2}$ となります．これの Fourier 逆変換を

使えば，$f(x)=\dfrac{\sin 2x\sin x}{\pi x^2}$ の Fourier 変換は $\hat{f}=\dfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-2,2]}$ です．$\hat{f_k}=(\hat{f})^k$ で，この右辺は $k\to\infty$ のときに $\chi_{[-1,1]}$ に L^2-収束することはすぐに計算できるので，逆 Fourier 変換で戻して答えは $\dfrac{\sin x}{\pi x}$ です.

[5] まず，$f\in L^1(\mathbf{R})$, $g\in L^2(\mathbf{R})$ より $f*g\in L^2(\mathbf{R})$ であることに注意します. また，[2] (2) で説明したように $\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g}$ です．これより，

$$\int |\widehat{f*g}(\xi)|^2(1+\xi^2)^s\,d\xi$$

を計算すると，$\|\hat{f}\|_\infty\le\|f\|_1$ を使って上の積分は

$$\|f\|_1^2\int|\hat{g}(\xi)|^2(1+\xi^2)^s\,d\xi$$

で抑えられるので，結論が出ます.

[6] (1) たとえば $f(x)\le x^2+1$ なので f は緩増加です.

(2) Heaviside 関数の微分が δ-関数であったのと同様の議論により $f'=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta_n$ です．(試験関数に適用したとき，右辺は有限和になり，超関数としての収束に問題ありません．)

(3) これは，直前まで行っている人が 1 人いたほかは誰もできていませんでした.

f' を超関数として Fourier 変換すると，一方では $i\xi\hat{f}$ であり，一方では $\sum_{n\in\mathbf{Z}}e^{-in\xi}$ ですが，後者の式は Poisson の和公式により，緩増加超関数として $2\pi\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta_{2\pi n}$ に等しくなります．そこでこの式を $i\xi$ で割ろうとするのですがいきなり割るのは原点で問題があり，うまくいきません．一般に定数 a について，$x\delta_a=a\delta_a$ であること，また $-x\delta'=\delta$ であることに注意して，

$$T=-2\pi i\left(\sum_{n\in\mathbf{Z},n\neq0}\frac{\delta_{2\pi n}}{2\pi n}-\delta'\right)$$

とおくと，これは緩増加超関数で,

$$\xi T=-2\pi i(\sum_{n\in\mathbf{Z},n\neq0}\delta_{2\pi n}+\delta)=\xi\hat{f}$$

を得ます．これより，$\xi(T-\hat{f})=0$ なので，$\hat{f}=T+c\delta$ となる定数 c が存在します. 定数 c の値を決めるにはたとえば，試験関数 e^{-x^2} を使えばよく，$c=-\pi$ がわかるので，結局答えは

$$\hat{f}=-i\sum_{n\in\mathbf{Z},n\neq0}\frac{\delta_{2\pi n}}{n}+2\pi i\delta'-\pi\delta$$

です.