解析学 VI 期末テスト

2007 年 2 月 5 日 13:00–16:00
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

この試験はノート持ち込み可で行います．解答は解答用紙に書いてください．

[1] $\mathbf{R}$ 上の超関数 T で，$(x-1)^2(x-2)T=0$ となるものをすべて求めよ．

[2] $\mathbf{R}$ 上の可測関数 f について次の 2 条件が同値であることを示せ．
(1) $f=g*h$ となる $g,h\in L^2(\mathbf{R})$ が存在する．
(2) $f=g*g$ となる $g\in L^2(\mathbf{R})$ が存在する．

[3] $\mathbf{R}$ 上の関数 $f,g\in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\hat{f}\hat{g}\in L^2(\mathbf{R})$ であったとする．このとき，$f*g\in L^2(\mathbf{R})$ であって，$\widehat{f*g}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ がほとんどいたるところ成り立つことを示せ．

[4] $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)=\dfrac{\sin 2x\sin x}{\pi x^2}$ に対し，$f_k=f*f*\cdots*f$ とおく．ただし，右辺に f の現れる回数は k である．このとき $L^2(\mathbf{R})$ における極限 $\lim_{k\to\infty} f_k$ を求めよ．

[5] $s\geq 0$ に対し，Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$ を考える．$f\in L^1(\mathbf{R})$, $g\in H^s(\mathbf{R})$ に対し，$f*g\in H^s(\mathbf{R})$ と $\|f*g\|_{H^s}\leq \|f\|_1\|g\|_{H^s}$ が成り立つことを示せ．

[6] $x\in\mathbf{R}$ に対し，$f(x)=[x]$ とおく．(ただし，実数 x に対し，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．)
(1) f は緩増加超関数とみなせることを示せ．
(2) 超関数としての微分 f' を求めよ．
(3) f の緩増加超関数としての Fourier 変換を求めよ．