解析学特別演習 II・小テスト (7)

2007 年 1 月 29 日 10:00–12:15
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

この試験はノート持ち込み可で行います．解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．

[1] $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \text{ の時,} \\ x+1, & -1 < x \leq 0 \text{ の時,} \\ -x+1, & 0 < x < 1 \text{ の時.} \end{cases}$$

この時 $f(x)$ は，どの範囲の s に対し Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$ の元となるか．(ただし，$s \geq 0$ とする．)

[2] T を $\mathbf{R}$ 上の超関数でコンパクト台を持つものとする．このとき次の各問に答えよ．

(1) $\xi \in \mathbf{R}$ に対し，$f(\xi) = \langle T, e^{-ix\xi} \rangle$ とおく．このとき $f(\xi)$ は C^∞-級関数であることを示せ．

(2) (1) の $f(\xi)$ について，ある ξ の多項式 $p(\xi)$ が存在して，すべての ξ について $|f(\xi)| \leq |p(\xi)|$ となることを示せ．

(3) (1) の f を緩増加超関数とみなしたものは，T の緩増加超関数としての Fourier 変換 $\hat{T}$ に等しいことを示せ．

[3] T, S を $\mathbf{R}$ 上の超関数でコンパクト台を持つものとする．このとき，T, S の緩増加超関数としての Fourier 変換 $\hat{T}, \hat{S}$ は [2] によりそれぞれ C^∞-級関数とみなすことができ，それらをかけたもの $\hat{T}\hat{S}$ が考えられる．一方，$T * S$ もコンパクト台を持つ超関数なので，その緩増加超関数としての Fourier 変換 $\widehat{T * S}$ が考えられる．これらについて，$\hat{T}\hat{S} = \widehat{T * S}$ が成り立つことを示せ．