解析学特別演習 II・小テスト解説 (6)

2007 年 1 月 15 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

採点は Teaching Assistant の石谷君です．平均は 64 点，最高は 90 点 (3 人) でした．簡単な解説をつけます.

[1] (30 点) Fourier 変換して，$(\hat{f})^2 = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$ より，各点 ξ ごとに，$\hat{f}(\xi) = \pm\pi^{1/4}e^{-\xi^2/8}$ となりますが，$\hat{f}$ は連続なので，$\pm$ はすべての ξ に共通でないといけません．これより逆 Fourier 変換で戻して，$f(x) = \pm(4/\pi)^{1/4}e^{-2x^2}$ ($\pm$ はすべての x について共通) となります.

[2] (30 点) $1/p + 1/q = 1$ とします．$f \in L^p(\mathbf{R})$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ に対し，Hölder の不等式より，$|\langle f, \phi\rangle| \leq \|f\|_p\|\phi\|_q$ となります．また，

$$\left(\int |\phi(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \leq \left(\int \frac{(x^2|\phi(x)| + |\phi(x)|)^q}{x^2+1} \, dx\right)^{1/q} \leq 2\pi^{1/q}p_2(\phi)$$

であることより，f は緩増加超関数となります.

[3] (20 点) 一番簡単な例は，$T = \delta$, $S = \mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}$, $f(x) = x$ でしょう．$fT = 0$, $(fT)S = 0$, $fS = 1$, $(fS)T = \delta$ となります.

[4] (20 点) 試験関数にほどこして極限を普通に計算すれば，極限が $2\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}$ であることがわかります.