解析学特別演習 II・小テスト (6)

2006 年 12 月 18 日 13:00–14:30
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

この試験はノート持ち込み可で行います．解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．

[1] $f \in L^1(\mathbf{R})$ で $(f * f)(x) = e^{-x^2}$ となるものをすべて求めよ．

[2] $L^p(\mathbf{R})$, $1 < p < \infty$, の元は緩増加超関数とみなせることを示せ．

[3] 次のすべての条件を満たす $\mathbf{R}$ 上の超関数 $T, S$ と $C^\infty$-関数 $f$ の組を挙げよ．条件を満たしていることをきちんと示すこと．

(1) 超関数 $fT$ は，ある $C^\infty$-関数 (の定める超関数) と一致する．
(2) 超関数 $fS$ は，ある $C^\infty$-関数 (の定める超関数) と一致する．
(3) $fT$ を $C^\infty$-関数と思って $S$ にかけた超関数と，$fS$ を $C^\infty$-関数と思って $T$ にかけた超関数は一致しない．

[4] $\varepsilon > 0$ に対し，$\dfrac{1}{x+i\varepsilon}$, $\dfrac{1}{x-i\varepsilon}$ を $\mathbf{R}$ 上の超関数と思ったものをそれぞれ，$T_\varepsilon$, $S_\varepsilon$ とする．$\varepsilon \to 0+$ のとき，$T_\varepsilon + S_\varepsilon$ の超関数としての極限を求めよ．