解析学特別演習 II・小テスト解説 (5)

2006 年 12 月 4 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

採点は Teaching Assistant の石谷君です．平均は 33 点，最高は 80 点 (1 人) でした．簡単な解説をつけます．

[1] (40 点) N は自然数全体を動くとして,「$\mathbf{Q}+i\mathbf{Q}$ を係数に持つ多項式を $[-N,N]$ に制限したもの」を考えればそのような関数たちは可算個であり， $L^2(\mathbf{R})$ で稠密になります.

[2] (30 点) $g_n(x) = (n/\sqrt{\pi})e^{-n^2x^2}$ とおきます．$\hat{g}_n(\xi) = e^{-\xi^2/n^2}$ です．$g_n \in L^1(\mathbf{R})\cap L^2(\mathbf{R})$ なので，$f * g_n \in L^1(\mathbf{R})\cap L^2(\mathbf{R})$ です．この Fourier 変換は $\hat{f}\hat{g}_n$ で，これは $L^2(\mathbf{R})$ の元になります．$\hat{g}_n$ の形と，$\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ であることより，$\{\hat{f}\hat{g}_n\}$ は $L^2(\mathbf{R})$ における Cauchy 列であることがわかり，$\{f*g_n\}$ も $L^2(\mathbf{R})$ における Cauchy 列になります．したがって，部分列に移ることにより，$\{f*g_{n_k}\}_k$ はある L^2-関数にほとんどいたるところ各点収束します．一方，$\{f*g_n\}$ は，f に L^1-収束しているので，$\{f*g_{n_k}\}_k$ の部分列が，f にほとんどいたるところ各点収束します．これより，上の「ある L^2-関数」が f にほとんどいたるところ等しいことになり，f が L^2 であることが導かれます.

[3] (30 点) $f \in L^1(\mathbf{R})$, $f \notin L^2(\mathbf{R})$ で，測度 0 の集合上で値を変えても連続にできないものを取れば O.K. です.

(2) については，もしも $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$ になったとすると，Fourier 逆変換によって f はある連続関数にほとんどいたるところ一致することになってしまうからです.

(2) については，もしも $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ になったとすると，上の問題 [2] によって，$f \in L^2(\mathbf{R})$ になってしまうからです.

具体的にはたとえば，$f(x) = \dfrac{\chi_{(0,1)}(x)}{\sqrt{x}}$ ととれます.