2005 年度解析学 VII・関数解析学期末テスト

2005 年 9 月 30 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

この試験はノート持ち込み可で行います．時間は 3 時間です．

以下すべての問題で，$\mathbf{R}^n$ 上では通常の Lebesgue 測度を考えています．

[0] Lebesgue の収束定理のステートメントを書け．

[1] 次のおのおのについて，条件を満たす例を挙げよ．その例が条件を満たしていることをきちんと説明すること．

(1) $L^2(\mathbf{R}^2)$ の関数列で，0 に弱収束しているが強収束はしていないもの．

(2) $L^2(\mathbf{R})$ の関数列 $\{f_n\}_n$ で $\{g \in L^2(\mathbf{R}) \mid (f_n, g) \to 0\}$ は，$L^2(\mathbf{R})$ で稠密だが，$\|f_n\|_2 \to \infty$ となるもの．

(3) Hilbert 空間 H から H への有界線形作用素 T であって，単射でかつ像が稠密だが，全射ではないもの．

(4) Hilbert 空間 H から H への有界線形作用素 T であって，T は compact 作用素でないが，T^2 は 0 でない compact 作用素となるもの．

(5) Hilbert 空間 H から H への有界線形作用素 T であって，単射で像は閉集合だが，Fredholm 作用素ではないもの．

[2] Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素の列 $\{T_n\}_n$ を考える．任意のベクトル $x, y \in H$ について，$\lim_{n\to\infty}(T_n x, y)$ が存在するならば，ある有界線形作用素 T が存在して $\lim_{n\to\infty}(T_n x, y) = (Tx, y)$ となることを示せ．

[3] $\mathbf{R}$ 上の可測関数 $f(x)$ を考える．

(1) $\mathrm{ess.sup}_x |f(x)|$ の定義を述べよ．

(2) 「すべての $g \in L^2(\mathbf{R})$ について $fg \in L^2(\mathbf{R})$ となる」ことの必要十分条件は $\mathrm{ess.sup}_x |f(x)| < \infty$ であることを示せ．

(3) $\mathrm{ess.sup}_x |f(x)| < \infty$ であるとき，$g \in L^2(\mathbf{R})$ に $fg \in L^2(\mathbf{R})$ を対応させる写像 T は，$L^2(\mathbf{R})$ 上の有界線形作用素であって，そのノルムは $\mathrm{ess.sup}_x |f(x)|$ に等しいことを示せ．

[4] $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ とする．$f \in L^p(\mathbf{R})$ に対し

$$K_f = \{g \in L^q(\mathbf{R}) \mid \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, dx = 0\}$$

とおく．$L^p(\mathbf{R})$ 内の関数列 $\{f_n\}_n$ に対し，$\{f_n\}_n$ の有限線形結合たちが $L^p(\mathbf{R})$ で稠密であるための必要十分条件は $\bigcap_n K_{f_n} = \{0\}$ であることを示せ．

[5] $f \in L^1(\mathbf{R})$ を取り，$L^2(\mathbf{R})$ 上の有界線形作用素 T を $Tg = f * g$, $g \in L^2(\mathbf{R})$ で定める．このとき T が compact 作用素になるのは f がどのようなときか．