2004年度解析学VII・関数解析学期末テスト

2004年9月10日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟323号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

この試験は自筆ノート持ち込み可で行います．時間は3時間です．

以下すべての問題で，$\mathbf{R}$, $[0,2\pi]$ 上では通常のLebesgue測度を考えています．

[1] X を有限次元ノルム空間，Y をBanach空間，T を X から Y への線形作用素とする．このとき T は必ず有界であると言えるか．理由をつけて答えよ．

[2] $1 < p < \infty$ のとき，数列空間 ℓ^1 は ℓ^p の部分空間であることを示せ．これは閉部分空間であるか？ 理由をつけて答えよ．

[3] $1 \le p < \infty$ とし，$L^p([0,2\pi])$ を考える．このBanach空間における点列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $f_n(x) = e^{inx}$, $x \in [0,2\pi]$ で定める．このときこの点列は，$L^p([0,2\pi])$ において弱収束しているか．理由をつけて答えよ．

[4] $H = L^2([0,2\pi])$ とし，$g \in L^1([0,2\pi])$ を一つ選ぶ．任意の $f \in H$ に対し，$f + g*g*g*f$ を対応させる作用素を T とおくと，この T は，H 上のFredholm作用素であることを示し，そのindexを求めよ．

ただし，ここで $*$ は合成積であり，$[0,2\pi]$ 上の可測関数を $[0,2\pi)$ 上の関数とみなしてさらに，$\mathbf{R}$ 上の周期 2π の関数と思って定義されるものである．

[5] $g \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，線形写像 $T_g : L^\infty(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ を，$f \in L^\infty(\mathbf{R})$ のとき，$T_g f = fg$ と定める．このとき次の問に答えよ．

(1) T_g が単射であることと，T_g の値域が稠密であることは同値であることを証明せよ．

(2) T_g が全射になることはあるか．理由をつけて答えよ．

[6] $L^\infty(\mathbf{R})$ 内の関数列 $\{F_n(x)\}_n$ についての次の4条件は互いに必要条件，十分条件であるか．理由をつけて答えよ．

(1) $\sup_n \|F_n\|_\infty < \infty$ であってかつ，$L^2(\mathbf{R})$ のある稠密な部分空間 K に対し，

$$f \in K \Rightarrow \|F_n f\|_2 \to 0$$

がなりたつ．

(2) すべての $f \in L^2(\mathbf{R})$ について $\|F_n f\|_2 \to 0$ がなりたつ．

(3) $L^2(\mathbf{R})$ のある稠密な部分空間 K に対し，

$$f \in K \Rightarrow \|F_n f\|_2 \to 0$$

がなりたつ．

(4) すべての $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ について $(F_n f, g)_{L^2} \to 0$ がなりたつ．