2001 年度解析学 XD・スペクトル理論演習問題

2002 年 1 月 16 日
河東泰之

以下の番号の問題の中から 7 題解いて，レポートを提出してください．
[2], [4], [7], [8], [10], [14], [18], [23], [29], [30], [31]
締め切りは 1/28(月)，提出先は 1 階事務室です．(その他の番号の問題は単に練習のためのものです．)

[25] Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素 T は，H で弱収束を考えた空間からそれ自身への写像として連続であることを示せ.

[26] $B(H)$ の閉じた両側イデアルで，0 でないものは，$K(H)$ を含むことを示せ.

[27] 可分な無限次元 Hilbert 空間 H の完全正規直交系を 2 組取って，$\{e_n\}_n, \{f_n\}_n$ とする．$T \in B(H)$ について，$\sum_{n,m=1}^{\infty} |(Te_n, f_m)|^2$ は，$\{e_n\}_n, \{f_n\}_n$ の取り方によらないことを示せ．(これが有限な作用素全体が，Hilbert-Schmidt class である．授業では，$e_n = f_n$ として，かつ一組固定していた．)

[28] $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ とおき,

$$H = \{f(z) \mid D \text{ 上の正則関数で} \int_D |f(x+iy)|^2 \, dxdy < \infty\}$$

として，$f, g \in H$ に対し,

$$(f, g) = \int_D f(x+iy)\overline{g(x+iy)} \, dxdy$$

とおく.
(1) この内積で H は Hilbert 空間になることを示せ.
(2) $T : f(z) \mapsto z^2 f(z)$ は，H 上の Fredholm operator になることを示せ．その index はいくらか.

[29] ℓ^2 上の有界線型作用素，T を次のように定める.

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, \frac{1}{1}x_1, \frac{1}{2!}x_2, \frac{1}{3!}x_3, \dots).$$

この作用素のスペクトルを求めよ.

[30] $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ を固定し，$L^2(0, 1)$ 上の f による掛け算作用素を A とする．A のスペクトル分解に現れる $E(\lambda)$ を具体的に記述せよ.

[31] 自然数 n について，$L^2(\mathbf{R})$ の部分空間 X_n, Y_n を次のように定める.

$$X_n = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid f \text{ は } [-n, n] \text{ の外ではほとんどいたるところ 0 に等しい}\},$$

$$Y_n = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid \hat{f} \in X_n\}.$$

ただしここで，$\hat{f}$ は f の Fourier 変換を表す．さらに，$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ とおく.
このとき，X, Y はともに $L^2(\mathbf{R})$ の稠密な部分空間で，$X \cap Y = \{0\}$ となることを示せ.