2001年度解析学XD・スペクトル理論演習問題

2001年11月28日
河東泰之

学期末にこのうち何題かについてレポートを提出してもらいます.

[1] 次の条件を満たす例をあげよ.

T は Banach 空間 X から Banach 空間 Y への有界線形写像で，T の値域は無限次元だが，T は開写像ではない.

[2] X を無限次元 Banach 空間とする．X の中に次の条件を満たすような点列 $\{x_n\}_{n=1,2,3,\ldots}$ は存在しない事を示せ.（ヒント: Baire の category 定理を使う.）

X の任意の元は，$\{x_n\}$ のうちの有限個の1次結合で表される.

[3] 次の命題を示せ．下に方針のヒントをつけるが別の方針でできればもちろんそれでもよい.

(Ω,μ) を測度空間で $\mu(\Omega)=1$ とする．$p\in[1,\infty)$ に対し，X を $L^p(\Omega)$ の閉部分空間とする．もし，$X\subset L^\infty(\Omega)$ であれば，X は有限次元である．(Grothendieck)

[方針] (1) $T:(X,\|\ \|_\infty)\to(X,\|\ \|_p)$ を $Tf=f$ と定め，これに開写像定理を適用する.

(2) $p=2$ の時は，開写像定理から定まる定数 C が取れて，X の (L^2-内積に関する) 正規直交系 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ に対し，$\int_\Omega\sum_{j=1}^n|f_j(x)|^2\,dx\le C^2$ となることを示す.

(3) $p\in[1,2)$ の時は，$1/(2/p)+1/q=1$ となるように $q>1$ を取る．Hölder の不等式を用いて，$p=2$ の場合に帰着させる.

(4) $p>2$ の時も，$p=2$ のときに帰着させる.

[4] $f(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対し，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}}f(x-y)\frac{\sin y}{y}\,dy$ を対応させる線型写像を T_0 と書く．この写像が，$L^2(\mathbf{R})$ から $L^2(\mathbf{R})$ への有界線型写像に延長できることを示し，その norm を求めよ.

[5] $f\in L^\infty(\mathbf{R})$ に対し，$L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 T_f を $T_f(g)(x)=f(x)g(x)$, $g(x)\in L^2(\mathbf{R})$ で定める．この作用素 T_f の norm は何か．また，$\|T_fg\|=\|T_f\|$ となる g で $\|g\|=1$ となるものが取れるための f の条件を求めよ.

[6] 可分無限次元 Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素の列 $\{T_n\}_n$ で，すべての $x\in H$ に対し $\|T_nx-x\|\to0$, $(n\to\infty)$, だが $\|T_n-I\|=1$ となるものの例を作れ．ただし，I は，H 上の恒等作用素である.

[7] 以下の条件を満たす複素数列 $\{c_n\}_n$ は存在しないことを示せ.

複素数の無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ が絶対収束するための必要十分条件は，$\{c_na_n\}_n$ が有界なことである.

[8] ℓ^1 から c_0 への作用素 T を $\{Tx\}_n=\{\sum_{m\ge n}x_m\}_n$ で定める．これが有界線型作用素であることを示せ．この norm は何か.

[9] X を Banach 空間，Y をその (閉とはかぎらない) 部分空間とする．Y の annihilater $Y^\perp$ を，

$$Y^\perp = \{\phi \in X^* \mid \phi(y) = 0,\ \ \forall y \in Y\}$$

と定め，また X^* の部分空間 Z に対し，

$$Z^\perp = \{x \in X \mid \phi(x) = 0,\ \ \forall \phi \in Z\}$$

とおく．この時，次の各命題を示せ．
(1) $Y^\perp$ は X^* の閉部分空間である．
(2) $Y^{\perp\perp}$ は Y の閉包に等しい．
(3) もし，Y が X の閉部分空間であれば，Y^* は，$X^*/Y^\perp$ と同型である．

[10] $[0,1]$ 上の複素数値連続関数全体に sup norm を入れた Banach 空間 $C[0,1]$ を考える．この部分集合 X_n を,「すべての $y \in [0,1]$ に対して，$|f(x)-f(y)| \le n|x-y|$」となるような $x \in [0,1]$ が存在するような $f(x)$ の集合とする．各 X_n は閉集合で内点を持たないことを示せ．このとき Baire の category 定理から何がわかるか．

[11] X, Y, Z を Banach 空間とする．$X \times Y$ から Z への作用素 T が次の条件を満たすとする．
(1) 各 $x \in X$ に対し，$y \mapsto T(x,y)$ は Y から Z への有界線型作用素である．
(2) 各 $y \in Y$ に対し，$x \mapsto T(x,y)$ は X から Z への有界線型作用素である．
この時，X で $x_n \to x$, Y で $y_n \to y$ であれば Z で $T(x_n, y_n) \to T(x,y)$ であることを示せ．

[12] $\mathbf{C}$ 係数の vector 空間 X 上に，二つの実数値関数 p_1, p_2 で次の条件を満たすものがあるとする.（下で，$j = 1,2$ である.）
(1) $0 \le p_j(x) < \infty$.
(2) $x, y \in X$ について，$p_j(x+y) \le p_j(x) + p_j(y)$.
(3) $c \in \mathbf{C}$, $x \in X$ について $p_j(cx) = |c| p_j(x)$.
さらに，X 上の $\mathbf{C}$-linear な汎関数 φ があって $|\varphi(x)| \le p_1(x) + p_2(x)$ を満たしているとする．この時，X 上の $\mathbf{C}$-linear な汎関数 φ_1, φ_2 が $|\varphi_j(x)| \le p_j(x)$, $(j = 1,2, x \in X)$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ となるように取れることを示せ．

[13] Banach 空間 X が reflexive であることと，X^* が reflexive であることは同値であることを示せ．

[14] ℓ^∞ の単位球は弱点列 compact か？理由を付けて答えよ．

[15] $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$f_n(x) = e^{inx} f(x)$ とおく．Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{R})$ で，関数列 $\{f_n\}_n$ は，弱収束先を持つか？持つならばその弱極限は何か？

[16] Banach 空間 c_0 における点列 $\{x_n\}_n$ を考え，各 x_n は複素数列 $\{x_{nk}\}_k$ であるとする．この点列 $\{x_n\}_n$ が 0 に弱収束するための必要十分条件は，$\sup_n \|x_n\| < \infty$ かつ，すべての k について $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = 0$ となることである．このことを証明せよ．

[17] Banach 空間 ℓ^1 の点列 $\{x_n\}_n$ が $x \in \ell^1$ に弱収束しているとする．このとき，実は $\{x_n\}_n$ は，x に ℓ^1-norm で収束していることを示せ．

[18] Hilbert 空間 H 上の作用素の列 T_n が，次の条件を満たすとする．
すべての $x \in H$ について，列 $\{T_n x\}_n$ は 0 に弱収束する．
このとき $\{T_n\}_n$ は有界であることを示せ．

[19] Hilbert 空間 ℓ^2 の元，$x = (x_n)$ に対し，$(Tx)_n = c_n x_{n+1}$ とはたらく作用素 T を考える．ただし，ここで (c_n) は有界な複素数列である．いつ，この T が compact 作用素になるか答えよ．

[20] 任意の $L^1(\mathbf{R})$ の元 $f(x)$ に対し，$L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 $T_f : g \mapsto f*g, (g \in L^2(\mathbf{R}))$ を考える．これは compact operator であるか? 理由をつけて答えよ．

[21] T を Banach 空間 X から Banach 空間 Y への compact operator とする．TX が，Y の閉部分空間であれば，TX は，有限次元であることを示せ．

[22] Reflexive な Banach 空間 X から任意の Banach 空間 Y への compact operator T に対し，$\|Tx\| = \|T\|$ となる $x \in X$ で，$\|x\| = 1$ となるものが存在することを示せ．

[23] 可分な無限次元 Hilbert 空間 H 上の compact operator 全体のなす Banach 空間を $K(H)$ とする．この $K(H)$ は，可分であることを示せ．

[24] $L^\infty(\mathbf{R})$ 内で，次の 2 条件をともに満たす関数列 $\{f_n(x)\}_n$ の例をあげよ．きちんと説明をつけること．
(1) $L^\infty(\mathbf{R})$ を自然に $L^1(\mathbf{R})^*$ と思ったとき，$\{f_n\}_n$ の weak $*$-limit (汎弱極限) は 0.
(2) $\{f_n\}_n$ は $L^\infty(\mathbf{R})$ 内で，0 には弱収束しない．