解析学 VI 演習問題

河東泰之

[1] $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ で，その Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ は $C_0(\mathbf{R})$ に入るが，$f(x) \notin L^1(\mathbf{R})$ となるものを具体的に構成せよ．($\hat{f}(\xi) \in C_0(\mathbf{R})$ とは，より厳密には，ある $g(\xi) \in C_0(\mathbf{R})$ が存在して，$\hat{f}(\xi) = g(\xi) \quad$ a.e. ということである．)

[2] $f(x), g(x) \in L^1(\mathbf{R})$ で，$\|f\|_1 = \|g\|_1 = 1$ だが，$\|f * g\|_1 = 0$ となることがあるか？理由を付けて答えよ．

[3] $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対し，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-y)\frac{\sin y}{y}\ dy$ を対応させる線型写像を T_0 と書く．この写像が，$L^2(\mathbf{R})$ から $L^2(\mathbf{R})$ への有界線型写像に延長できることを示し，その norm を求めよ．

[4] 次の等式を示せ．

$$\frac{e^{2\pi\alpha}+1}{e^{2\pi\alpha}-1} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}.$$

ただし，αは，正の定数である．

[5] $f \in L^\infty(\mathbf{R})$ に対し，$L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 T_fを $T_f(g)(x) = f(x)g(x)$, $g(x) \in L^2(\mathbf{R})$ で定める．この作用素 T_fの norm は何か．

[6] ℓ^∞の単位球は弱点列コンパクトか？理由を付けて答えよ．

[7] $C_0^\infty(\mathbf{R})$ の関数列 $\{f_n(x)\}_n$で，$\mathrm{supp} f_n \subset [0,1]$ で, $\|f_n\|_2 \le 1$ だが，$\{f_n(x)\}_n$は norm 収束するような部分列を含まないような例を作れ．

[8] $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$f_n(x) = e^{inx}f(x)$ とおく．Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{R})$ で，関数列 $\{f_n\}_n$は，弱収束先を持つか？持つならばその弱極限は何か？

[9] $f \in L^1(\mathbf{R})$ に対し，$f^*(x) = \overline{f(-x)}$とおく．このとき，$\|f * f^*\|_1 \le \|f\|_1^2$を示せ．また，この不等式で，等号が成り立たないことがあるか？成り立たないことがあればそのような例をあげ，またいつでも成り立つのならそれを証明せよ．

[10] Banach 空間 c_0（0 に収束する複素数列全体）の点列 $\{x_n\}_n$が，0 に弱収束するための必要十分条件は，$\sup_n \|x_n\| < \infty$ かつ，すべての kについて $\lim_n x_n(k) = 0$ である．この事を証明せよ．(ただし，$x_n(k)$ は，数列 $x_n \in c_0$の k項目を表す．)