数理科学 I 期末テスト解答解説

2004 年 7 月 27 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に 15×2, $15 + 10$, 25, 15×2 点の計 110 点満点です．この点数 x_2 が上に赤で書いてあります．第 2 回中間テストの点数を x_1 とすると，最終成績 x は前に予告したとおり，$x = 0.3 \max(x_1, x_2) + 0.7x_2$ (を四捨五入したもの) として計算します．(ただし 100 点を超えていたら 100 点で頭打ちです．) これが青で書いてある点数で，教務課に報告されるものです．採点ミスがあると思う人は，ただちに申し出て下さい．(返却する答案は，すべてコピーが取ってあります．)

期末テスト自体の最高点は 104 点 (1 人)，平均点は 65.4 点，その得点の分布は次のとおりです．あまりできはよくなかったので，正しい方針で計算してある場合は，かなり大きく計算が間違っていても部分点を多めにつけています．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
8 (人)	8	7	2	4	7	1

最終成績 (青い数字) の平均点は 66.7 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
7 (人)	8	8	2	4	7	1

各問の簡単な解答と解説は次のとおりです．

[1] 通常通り Lagrange の未定乗数法でやればどちらもすぐにできます．また，$\varphi(x, y) = 0$ のグラフは (1) で双曲線，(2) で楕円なのでもっと初等的な方法でも簡単にできます．

(1) 最大値なし，最小値 1.

(2) 最大値 1/4, 最小値 $-1/4$.

[2] (1) 点 $(u, v) = (-1, 0)$ に写るのは $(x, y) = (0, 0)$ だけです．そこで，

$$\begin{pmatrix} u_x(0,0) & u_y(0,0) \\ v_x(0,0) & v_y(0,0) \end{pmatrix}$$

の行列式が 0 でないことがわかれば逆関数定理が使えます．(点 $(x, y) = (-1, 0)$ において，この行列を計算している人が何人もいましたが，そうではありません．計算するべき点は $(x, y) = (0, 0)$ です．) この行列は，

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，O.K. です．(たとえば，$u_x(0, 0)$ を求めるには u の式で $y = 0$ とした上で x で微分して $x = 0$ とおけば簡単にできます．元の式をそのまま偏微分して行列式を求めて計算を間違えている人がたくさんいました．)

実際は，逆写像 φ, ψ は具体的に簡単な式で書けます．

(2) (1) の行列の逆行列なので

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

です．

[3] ベクトル $(t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$ を t, θ で偏微分するとそれぞれ，$(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $(-t\sin\theta, t\cos\theta, 1)$ となります．よって，授業の記号で $E = 1, F = 0, G = t^2 + 1$ となり，答えは

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{t^2+1}\, dt\, d\theta = \pi(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))$$

です．

$2\pi \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t^2+1}\, dt$ までできていれば 20 点にしてあります．$\displaystyle\int\int \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\, dx\, dy$ の公式を使うには z が，x, y の関数で表されていなくてはなりません．

[4] (1) $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ とパラメータ表示して線積分の定義どおり計算すると，2π となります．

(2) $-P_y(x,y) + Q_x(x,y) = 0$ であることがわかるので，原点を内部に含まない領域で Green の定理を使うと二重積分の値は 0 となります．これより，線積分の値は，積分する曲線が円でも正方形でも同じで，(1) と同じ 2π が答えとなります．

直接正方形上で線積分を定義どおりに計算することもできます．