数理科学 I 期末テスト

2004 年 7 月 26 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

このテストは自筆ノート持ち込み可で行います．(本や，人のノートのコピーは不可です．) 答案には途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は両面 1 枚です．それに収まるように書いてください．

[1] 次のそれぞれの場合について，$\varphi(x,y)=0$ という条件の下で，$f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ．(最大値または最小値がない場合はないと答えよ．)

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\varphi(x,y)=x^2-3y^2-1$.

(2) $f(x,y)=xy$, $\varphi(x,y)=x^2+4y^2-1$.

[2] xy-平面から点 $(0,1)$ を除いた領域から uv-平面への写像を次の式で定める．

$$u=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2},$$
$$v=\frac{2x}{x^2+(y-1)^2},$$

このとき次の問に答えよ．

(1) 点 $(u,v)=(-1,0)$ の近傍で上の写像は C^1 級の逆写像 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ を持つことを示せ.

(2) 点 $(u,v)=(-1,0)$ において，上の写像 φ,ψ に対し，行列

$$\begin{pmatrix} \varphi_u(-1,0) & \varphi_v(-1,0) \\ \psi_u(-1,0) & \psi_v(-1,0) \end{pmatrix}$$

を求めよ．

[3] $x=t\cos\theta$, $y=t\sin\theta$, $z=\theta$ $(0<t<1, 0<\theta<2\pi)$ とパラメータ表示される曲面の面積を求めよ．

[4]

$$P(x,y)=-\frac{x^2y+y^3+2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$Q(x,y)=\frac{x^3+xy^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

とする．また原点中心，半径 1 の左回りの円周を γ_1 とし，次に，4 点 $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ をこの順に線分で結び，さらに線分で $(1,1)$ までつないで得られる左回りの正方形を γ_2 とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{\gamma_1} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{\gamma_2} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ を求めよ．