複素解析学 I のまとめ

河東泰之

試験は，約 200 点分の問題の選択形式で，下の○印の項目から出ます.

１０月１５日
○正則関数の定義（連続微分可能性）
○線積分の定義
・積分記号下の微分に関する lemma
・Cauchy の積分公式の特別の形（円周とその中心に関する場合）
・Cauchy の積分公式の特別の形（円周とその中心から “少し” 外れた場合）

１０月２２日
○ Cauchy-Riemann の微分方程式
○代数学の基本定理
○べき級数の収束半径（Cauchy-Hadamard の公式）
○べき級数の項別微分可能性
○正則関数のべき級数展開
○一致の定理
○最大値の原理

１０月２９日
・長方形の像に対する Cauchy の積分定理
・区分的に滑らかな曲線
・細胞の定義
○ Cauchy の積分定理
・Cauchy の積分定理の強い形
・正則関数の定義が，微分可能性だけでよいこと
○孤立特異点と Laurent 展開
○極の位数と真性特異点
○留数と留数定理
・[例題] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ の留数による計算

１１月１２日
・除去可能特異点
・[例題] $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^3+1}\, dx$ の留数による計算
・[例題] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(e^x+e^{-x})}\, dx$ の留数による計算

・真性特異点の近傍でのふるまい
◯ Liouville の定理
◯偏角の原理
◯ Rouché の定理
・[例題] $\dfrac{1}{z^2} - \tan z$の実でない零点の数
◯開写像定理
・正則関数が１対１ならば，導関数は０にならないこと
◯ Schwarz の lemma
・単位円を単位円に写す全単射の決定
・鏡像の原理（の簡単な形）
・Phragmen-Lindelöf の定理

１１月１９日
◯等角写像の定義と特徴付け
◯回転数と Cauchy の積分定理の拡張
◯単連結性
◯正則関数の広義一様収束
◯正規族

１１月２６日
◯ Riemann の写像定理
◯一次分数変換と等角写像の例
・面積定理
・Bieberbach の定理

１２月３日
◯調和関数の定義と基本性質（平均値の性質，最大値の原理）
◯調和関数は局所的には，正則関数の実部となること
◯ Poisson の公式
◯円周に関する Dirichlet 問題の解法
◯調和関数から，それを実部に持つ正則関数を作る [例題] $\dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$
・[例題] $\displaystyle\int_0^\pi \log \sin x \, dx$ の計算
◯鏡像の原理の強い形
・二つの円環領域が等角写像で移りあえるための必要十分条件

１２月１０日
・Schwarz-Christoffel の公式
◯有理型関数の定義

○（全平面での）Mittag-Leffler の定理

○$\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$

○ [例題] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$

○$\pi \cot \pi z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}, n\neq 0} (\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}).$

○無限積の収束

１２月２４日

○（全平面で正則な関数の零点に関する）Weierstrass の定理

○基本乗積と種数

○ $\sin \pi z = \pi z \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$

○Γ関数の定義

○$\dfrac{d}{dz}\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(z+n)^2}$

・Legendre の 2 倍公式

１月２１日

○解析接続

○モノドロミー定理

１月２８日