複素解析学 I 期末テスト（1994 年 3 月 4 日）

河東泰之

時間は，午後 1 時から 3 時までです．自筆ノートのみ持ち込み可です．問題は，200 点分ありますので，選択して，100 点分（以上）解いてください．

[1] （30 点）$\zeta(6)$ を求めよ．ただし，$\zeta(s)$ は Riemann ζ 関数である．

[2] （30 点）

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n \frac{1}{z-n}$$

を示せ．

[3] （30 点）実軸上の有界閉区間 $[a,b]$ とその上の連続関数$\phi(t)$ を取る．

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\phi(t)}{t-z}\,dt, \quad (z \notin [a,b]).$$

とおいたとき，$\lim_{\varepsilon\to 0+}(f(x+i\varepsilon)-f(x-i\varepsilon))$ を，各実数 x に対して求めよ．

[4] （30 点）複素平面上の集合 $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, z \geq 0, z \neq 0\}$ で連続で，$\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ で調和な実数値関数 $f(z)$ で，$x > 0$ で $f(x) = 1$，$x < 0$ で $f(x) = -1$ を満たすものを一つあげよ．

[5] （40 点）複素平面上で，$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ の補集合を単位円板 $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ に写す正則な全単射を求めよ．

[6] （40 点）Dirichlet 級数

$$\frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \cdots$$

について，次の問いに答えよ．

(1)Re $s > \sigma$であれば，この級数が収束するような最小の実数σ を求めよ．

(2)Re $s > \sigma$であれば，この級数が絶対収束するような最小の実数σを求めよ．

いずれの場合も，答えのσが題意を満たしていることをきちんと証明すること．