複素解析学 I のまとめ・その２

河東泰之

試験は，約 200 点分の問題の選択形式で，前回のプリントおよび下の◯印の項目から出ます．

１２月１０日

・Schwarz-Christoffel の公式

◯有理型関数の定義

◯（全平面での）Mittag-Leffler の定理

◯$\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$

◯ [例題] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$

◯$\pi \cot \pi z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}, n\neq 0} (\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}).$

◯無限積の収束

１２月２４日

◯（全平面で正則な関数の零点に関する）Weierstrass の定理

◯基本乗積と種数

◯ $\sin \pi z = \pi z \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$

◯Γ関数の定義

◯$\dfrac{d}{dz}\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(z+n)^2}$

・Legendre の 2 倍公式

１月２１日

◯（直接）解析接続

◯曲線に沿った解析接続とその一意性

◯ホモトピーの定義

◯モノドロミー定理

◯ Abel の lemma

◯ Dirichlet 級数の半平面での収束

◯ Dirichlet 級数の収束範囲は実軸上の特異点で境界づけられること

◯$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$は，$\sum_{n=m}^{m'} a_n$ が有界なら $\mathrm{Re}\, s > 0$ で収束

◯（強い意味で）乗法的な関数と Euler 積展開

◯ Riemann ζ関数の $\mathrm{Re}\, s > 0$ への解析接続

１月２８日

○ $s \to 1+$の時，$\sum_p p^{-s} \sim \log \dfrac{1}{s-1}$

○ mod m の指標とその直交関係

○ Dirichlet の L 関数 $L(s,\chi)$

○$\chi \neq 1$ の時，$L(s,\chi)$ は，$\mathrm{Re}\, s > 0$ で正則

○ L 関数の積 $\zeta_m(s)$ は $s=1$ を 1 位の極として持つ.

○素数の部分集合の解析的密度

○ Dirichlet の算術級数定理

Dirichlet の算術級数定理関連の部分は，試験範囲ですが，この部分からは基礎的なことしか出題しません.