1996 年度解析学 VII・関数解析学期末テスト

1996 年 9 月 13 日

河東泰之

問題用紙は 2 枚あります

この試験は自筆ノート持ち込み可で行います.（本，プリント，人のノートのコピーなどは不可です.）時間は 3 時間です．問題はたくさんありますが，1 問 20〜30 点でつける予定なので，適当に選択して解いてください.

[1] 次のように，空間 X, Y を定める.

$$X = (\text{収束先を持つ複素数列全体}),$$
$$Y = (0\ \text{に収束する複素数列全体}).$$

$x = \{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \in X$ に対し，$\|x\| = \sup_n |x_n|$ と定めることにより，通常の線型演算と合わせて X は Banach 空間，Y はその閉部分空間となる.

この時，Banach 空間としての商空間 X/Y はどのような空間か．具体的に記述せよ.

[2] $L^2(\mathbf{R})$ 上の有界線型作用素の列 $\{T_n\}_{n=1,2,\ldots}$ で次の 2 条件をともに満たすものの例をあげよ．きちんと説明を付けること.

(1) 0 でないどの $f \in L^2(\mathbf{R})$ についても，$\{\|T_n f\|_2\}_n$ は 0 には収束しない.

(2) すべての $f \in L^2(\mathbf{R})$ について，$\{T_n f\}_n$ は 0 に弱収束する.

[3] T を Hilbert 空間 H から自分自身への有界線型作用素とする．このとき次の問いに答えよ.

(1) $\|T\| = \|T^*\|$ を示せ.

(2) さらに，$\|T\| \leq 1$ とし，$x \in H$ が $Tx = x$ を満たすとする．このとき $T^*x = x$ でもあることを示せ.

[4] $L^\infty(\mathbf{R})$ 内で，次の 2 条件をともに満たす関数列 $\{f_n(x)\}_n$ の例をあげよ．きちんと説明をつけること.

(1) $L^\infty(\mathbf{R})$ を自然に $L^1(\mathbf{R})^*$ と思ったとき，$\{f_n\}_n$ の weak $*$-limit（汎弱極限）は 0.

(2) $\{f_n\}_n$ は $L^\infty(\mathbf{R})$ 内で，0 には弱収束しない.

[5] 自然数 n について，$L^2(\mathbf{R})$ の部分空間 X_n, Y_n を次のように定める.

$$X_n = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid f\text{は}\ [-n, n]\ \text{の外ではほとんどいたるところ 0 に等しい}\},$$
$$Y_n = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid \hat{f} \in X_n\}.$$

ただしここで，$\hat{f}$は fの Fourier 変換を表す．さらに，$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$とおく．

このとき，X, Yはともに $L^2(\mathbf{R})$ の稠密な部分空間で，$X \cap Y=\{0\}$ となることを示せ．

[6] Tを無限次元可分 Hilbert 空間 H上の線型自己共役 compact 作用素とする．この時，次の条件を満たす，Hの完全正規直交系 $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$が存在することを示せ．

「x_nは Tの固有ベクトルで，対応する固有値 c_nは，$c_n \to 0$ を満たす.」

[7] Hilbert 空間 $L^2(0,1)$ を Hとおき，$[0,1]$ 上の複素数値連続関数の全体を $C[0,1]$ とおく．$g(x) \in C[0,1]$ に対し，H上の有界線型作用素 M_gを $(M_g)f(x)=g(x)f(x)$, $f \in H$, $x \in (0,1)$ で定める．

この時，H上の有界線型作用素 Tで，すべての $g \in C[0,1]$ に対して $TM_g=M_gT$となるようなものをすべて求めよ．