1996 年度解析学 VII・関数解析学・演習問題

5/15/1996

河東泰之

[14] $f(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対し，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-y)\frac{\sin y}{y}\,dy$を対応させる線型写像を $T_0$と書く．この写像が，$L^2(\mathbf{R})$ から $L^2(\mathbf{R})$ への有界線型写像に延長できることを示し，その norm を求めよ．

[15] $\{c_n\}_n$を複素数列とする．$H=\ell^2$から，$H$への有界線型作用素 $T$を，$\{x_n\}_n\in H$に対し，$\{Tx_n\}_n=\{c_nx_n\}_n$と定めたい．これが実際に有界線型作用素となるための $\{c_n\}_n$に関する条件を求めよ．また，さらに $T$が全単射になるための $\{c_n\}_n$に関する条件を求めよ．

[16] $f\in L^\infty(\mathbf{R})$ に対し，$L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 $T_f$を $T_f(g)(x)=f(x)g(x)$, $g(x)\in L^2(\mathbf{R})$ で定める．この作用素 $T_f$の norm は何か．また，$\|T_fg\|=\|T_f\|$ となる $g$で $\|g\|=1$ となるものが取れるための $f$の条件を求めよ．

[17] 可分無限次元 Hilbert 空間 $H$上の有界線型作用素の列 $\{T_n\}_n$で，すべての $x\in H$に対し $\|T_nx-x\|\to 0$, $(n\to\infty)$, だが $\|T_n-I\|=1$ となるものを作れ．ただし，$I$は，$H$上の恒等作用素である．

[18] 以下の条件を満たす複素数列 $\{c_n\}_n$は存在しないことを示せ．

複素数の無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$が絶対収束するための必要十分条件は，$\{c_na_n\}_n$が有界なことである．