1996年度解析学 VII・関数解析学・演習問題

5/1/1996

河東泰之

[8] Xを Banach 空間とする．Xの完備化$\tilde{X}$は自然に Xと同型になることを示せ.

[9] 有限次元 Banach 空間 Xから有限次元 Banach 空間 Yへの線形写像は自動的に有界になることを示せ.

[10] Baire の category 定理で完備性の仮定を落としたときは結論が成り立たないことがあることを例によって示せ.

[11] 次の条件を満たす例をあげよ.

Tは Banach 空間 Xから Banach 空間 Yへの有界線形写像で，Tの値域は無限次元だが，Tは開写像ではない.

[12] Xを無限次元 Banach 空間とする．Xの中に次の条件を満たすような列 $\{x_n\}_{n=1,2,3,\ldots}$ は存在しない事を示せ.（ヒント: Baire の category 定理を使う.）

Xの任意の元は，$\{x_n\}$ のうちの有限個の 1 次結合で表される.

[13]* 次の命題を示せ．下に方針のヒントをつけるが別の方針でできればもちろんそれでもよい.

(Ω, μ) を測度空間で$\mu(\Omega) = 1$ とする．$p \in [1, \infty)$ に対し，Xを $L^p(\Omega)$ の閉部分空間とする．もし，$X \subset L^\infty(\Omega)$ であれば，Xは有限次元である．(Grothendieck)

[方針] (1) $T : (X, \|\ \|_\infty) \to (X, \|\ \|_p)$ を $Tf = f$と定め，これに開写像定理を適用する.

(2) $p = 2$ の時は，開写像定理から定まる定数 Cが取れて，Xの（L^2-内積に関する）正規直交系 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ に対し，$\int_\Omega \sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2\, dx \le C^2$となることを示す.

(3) $p \in [1, 2)$ の時は，$1/(2/p) + 1/q = 1$ となるように $q > 1$ を取る．Hölder の不等式を用いて，$p = 2$ の場合に帰着させる.

(4) $p > 2$ の時も，$p = 2$ のときに帰着させる.

後で問題がたまったところで，○○題選んで解け，といった形でレポートを出してもらいます.