1996 年度解析学 VII・関数解析学・演習問題

4/24/1996 河東泰之
yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

[1] ℓ^1はℓ^2の部分空間であることを示せ．これは閉部分空間か？

[2] X, Yを Banach 空間とする．この直積 $X \times Y$に norm を $\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$で定める．

(1) これが本当に norm であることを示せ．

(2) この norm は授業で $X \times Y$に定めた別の norm と同値であることを示せ．

[3] ℓ^∞の部分空間 Xを

$$X = \{\ \{a_n\}_n \in \ell^\infty \mid \lim_{n\to\infty} a_n \text{が存在する}\ \}$$

と定める．この時，Xはℓ^∞の閉部分空間であることを示せ．

[4] 複素平面上の開単位円板 D上で有界正則な関数 $f(z)$ 全体を Xとおき，$f \in X$に対し，$\|f\| = \sup_{z\in D} |f(z)|$ とおく．この norm で Xは Banach 空間になることを示せ．

[5] $p \in (1, \infty)$ を一つ決める．複素平面上の開単位円板 D上で正則な関数 $f(z)$ と $0 \le r < 1$ に対し，

$$M_p(f,r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}$$

とおき，さらにこのような fの中で，$\lim_{r\to 1-} M_p(f,r) < \infty$ となるもの全体を H^pとおき，$f \in H^p$に対し，$\|f\| = \lim_{r\to 1-} M_p(f,r)$ と定める．これで H^p上の norm が定まり，H^pは Banach 空間になることを示せ．

（これは，Hardy 空間といわれるものです．Sobolve 空間と同じ記号で書くことになっていますが，違うものです.）

[6] 4 月 17 日の授業で，次の定理を示した．

Xを Banach 空間，Yをその閉部分空間で，$X \ne Y$とする．任意の $c > 0$ に対し，$x \in X$で $\|x\| = 1$, $\|[x]\| > 1 - c$ となるものが存在する．

次の 2 つの場合にはそれぞれ，$x \in X$を，$\|x\| = 1$, $\|[x]\| = 1$ となるように取れることを示せ．

(1) Xが Hilbert 空間の場合．

(2) Xが有限次元の場合．

[7]* 上の問題で，$x \in X$を，$\|x\| = 1$, $\|[x]\| = 1$ となるようには取れないような X, Yの例をあげよ．

*印は難しい問題です．